Sehr geehrte Studienanfänger,

in diesem Dokument finden Sie Lösungen zu den Aufgaben, die wir Ihnen zum Selbsttest per E-Mail geschickt hatten. Die Musterlösungen sind sehr ausführlich gehalten um möglichst viele Details anzusprechen. Auch folgen manchmal weitere Erklärungen, die sich mit der Thematik der Aufgabe - aber nicht direkt der Aufgabe selbst - beschäftigen.

Es liegt in der Natur der Mathematik, dass meist verschiedene Lösungswege möglich sind. Auch müssen Ihre eigenen Lösungen natürlich nicht so ausführlich sein wie die hier folgenden. Alle genannten Dinge sollten Ihnen aber bekannt und geläufig sein.

Aufgabe 1: Quadratische Gleichungen

Bestimmen Sie sämtliche Lösungen der Gleichung $5x^2+7x = 24$

Zur Lösung quadratischer Gleichungen gibt es mehrere Verfahren. Im Skript zum Brückenkurs werden die **quadratische Ergänzung** sowie die daraus herleitbare **p/q-Formel** genannt. Es sind daher Lösungswege für beide Verfahren angegeben.

1.1 Lösung per pq-Formel:

$5x^2+7x = 24 \quad |:5$ zunächst muss durch den Koeffizienten des x² geteilt werden

$$x^2+\frac{7}{5}x = \frac{24}{5}$$

Da die pq-Formel Nullstellen findet, muss die Gleichung nach Null aufgelöst werden:

$$x^2+\frac{7}{5}x-\frac{24}{5} = 0$$

Die pq-Formel lautet $x_{1/2} = -\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q} = -\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$

p ist der Koeffizient des x¹
q ist die Konstante
der Koeffizient des x² <u>muss</u> 1 sein!

Da $x^2+\frac{7}{5}x-\frac{24}{5} = 0$ gilt $p = \frac{7}{5}$ und $q = -\frac{24}{5}$

Lösung: $x_{1/2} = -\frac{7}{10}\pm\sqrt{\frac{49}{100}+\frac{24}{5}}$

$$x_{1/2} = -\frac{7}{10}\pm\sqrt{\frac{529}{100}}$$

$$x_{1/2} = -\frac{7}{10}\pm\frac{23}{10} \quad => \quad x_1=\frac{8}{5}, \quad x_2=-3$$

1.2 Lösung per quadratischer Ergänzung:

Hinweis: Der Lösungsweg unter Verwendung der quadratischen Ergänzung ist etwas umfangreicher als der Weg unter Verwendung der pq-Formel. Dies ergibt sich direkt daraus, dass die pq-Formel mit Hilfe der quadratischen Ergänzung hergeleitet wird. In einigen Anwendungen (z.B. Kegelschnitte) gibt es jedoch keine Alternative zur quadratischen Ergänzung.

$5x^2+7x = 24 \quad |:5$ zunächst muss durch den Koeffizienten des x² geteilt werden

$$x^2+\frac{7}{5}x = \frac{24}{5}$$

Zum bestimmten der hier benötigten quadratischen Ergänzung b^2 betrachten wir die erste binomische Formel: $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$
Ziel ist, die linke Seite der obigen Gleichung auf das Muster dieser binomischen Formel zu bringen. x^2 entspricht a^2 - x ist also gleich dem a der binomischen Formel. Aus dem zweiten Summanden lässt sich damit b bestimmen, wonach b^2 auf beiden Seiten der Gleichung addiert werden muss, um das Quadrat herzustellen:

$$x^2+\frac{7}{5}x \text{ entspricht } a^2+2ab$$

$$\frac{7}{5}x \text{ entspricht } 2ab$$

$$\frac{7}{10} \text{ entspricht } b$$

Es muss also $b^2 = \left(\frac{7}{10}\right)^2$ addiert werden:

$$x^2+\frac{7}{5}x+\left(\frac{7}{10}\right)^2 = \frac{24}{5}+\left(\frac{7}{10}\right)^2$$

$$\left(x+\frac{7}{5}\right)^2 = \frac{24}{5}+\frac{49}{100}$$

$$\left(x+\frac{7}{5}\right)^2 = \frac{529}{100}$$ und zum Lösen die Wurzel gezogen werden

$$x+\frac{7}{5} = \pm\sqrt{\frac{529}{100}}$$

$$x_{1/2} = -\frac{7}{5}\pm\frac{23}{10} \quad \Rightarrow \quad x_1=\frac{8}{5}, \quad x_2=-3$$

Aufgabe 2: Bruchrechnung

Ist $\frac{1}{7}+\frac{3}{5}+\frac{1}{4}$ kleiner, größer oder gleich eins?

Um die Brüche addieren zu können müssen Sie gleichnamig gemacht - also auf den gleichen Nenner gebracht - werden. Die vorhandenen Nenner 7, 5 und 4 haben keine gemeinsamen Faktoren, der Hauptnenner lautet also $7 \cdot 5 \cdot 4 = 140$.

Die einzelnen Brüche werden entsprechend erweitert:

$$\frac{1}{7} \cdot \frac{5}{5} \cdot \frac{4}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{7} \cdot \frac{4}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{7} \cdot \frac{5}{5} = \frac{20}{7 \cdot 5 \cdot 4} + \frac{84}{7 \cdot 5 \cdot 4} + \frac{35}{7 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{20+84+35}{140} = \frac{139}{140} < 1$$

Wären die Nenner z.B. 8, 6 und 12, so wäre der Hauptnenner <u>nicht</u> $8 \cdot 6 \cdot 12$ sondern 24, da $8=2^3$, $6=2 \cdot 3$ und $12=2^2 \cdot 3$ und der Hauptnenner somit $2^3 \cdot 3=24$ wäre.

Aufgabe 3: Termumformungen

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke soweit wie möglich:

a) $$\frac{1}{a^2+2ab+b^2} + \frac{1}{a^2-b^2} - \frac{b^2}{a^4-a^2b^2} - \frac{1}{a^2}$$

Da verschiedene Bruchterme addiert/ subtrahiert werden sollen, müssen Sie zunächst gleichnamig gemacht werden. Dazu betrachten wir die einzelnen Nenner näher:

Der Nenner des ersten Bruchterms ist die erste binomische Formel.
Der Nenner des zweiten Bruchterms ist die dritte binomische Formel.
Im Nenner des dritten Bruchterms läßt sich a² ausklammern.

$$\frac{1}{a^2+2ab+b^2} + \frac{1}{a^2-b^2} - \frac{b^2}{a^4-a^2b^2} - \frac{1}{a^2}$$
$$= \frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(a-b)(a+b)} - \frac{b^2}{a^2(a^2-b^2)} - \frac{1}{a^2}$$

Im Nenner des dritten Bruchterms erkennt man nun ebenfalls die dritte binomische Formel:
$$= \frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(a-b)(a+b)} - \frac{b^2}{a^2(a-b)(a+b)} - \frac{1}{a^2}$$

Der Hauptnenner beinhaltet alle Faktoren, die in mindestens einem der Nenner vorkommen:
$(a+b)^2 \cdot (a-b) \cdot a^2$ [*Ausmultiplizieren des Hauptnenners ist zu diesem Zeitpunkt nicht sinnvoll*]

Somit muss jeder der Brüche mit den noch fehlenden Faktoren erweitert werden:
$$\frac{1}{(a+b)^2}\cdot\frac{(a-b)a^2}{(a-b)a^2} + \frac{1}{(a-b)(a+b)}\cdot\frac{(a+b)a^2}{(a+b)a^2} - \frac{b^2}{a^2(a-b)(a+b)}\cdot\frac{a+b}{a+b} - \frac{1}{a^2}\cdot\frac{(a+b)^2(a-b)}{(a+b)^2(a-b)}$$

Da nun alle Bruchterme den selben Nenner haben, kann alles auf einen Bruchstrich geschrieben werden:
$$= \frac{(a-b)a^2 + (a+b)a^2 - (a+b)b^2 - (a+b)^2(a-b)}{(a+b)^2(a-b)a^2}$$

[Der Term $a+b$ mit dem der dritte Bruchterm erweitert wurde muss eingeklammert werden!]

Nun wird der Zähler zusammengefasst. Auf den ersten Blick könnte z.B. a² aus den ersten beiden Summanden ausgeklammert werden, aber auch (a+b) aus den letzten dreien:
$$= \frac{(a-b)a^2 + (a+b)\cdot\left(a^2 - b^2 - (a+b)(a-b)\right)}{(a+b)^2(a-b)a^2}$$
$$= \frac{(a-b)a^2 + (a+b)\cdot\left(a^2 - b^2 - (a^2-b^2)\right)}{(a+b)^2(a-b)a^2}$$
$$= \frac{(a-b)a^2 + 0}{(a+b)^2(a-b)a^2} = \frac{1}{(a+b)^2}$$

b) $\quad \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{3^{2x}}{2} + 3^x + \frac{1}{2}}$

Der Term unter der Wurzel entspricht der ersten binomischen Formel:

$$\frac{3^{2x}}{2} + 3^x + \frac{1}{2} = \left(\frac{3^x}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

Vor dieser Umformung können die Wurzeln aber auch zusammengefasst werden:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{3^{2x}}{2} + 3^x + \frac{1}{2}} \\
=\ &\sqrt{2 \cdot \left(\frac{3^{2x}}{2} + 3^x + \frac{1}{2}\right)} \\
=\ &\sqrt{3^{2x} + 2\cdot 3^x + 1} \\
=\ &\sqrt{(3^x)^2 + 2\cdot 3^x + 1} \\
=\ &\sqrt{(3^x+1)^2} \\
=\ &3^x+1
\end{aligned}$$

Diese Umformung wäre auch in anderer Reihenfolge möglich:

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{3^{2x}}{2} + 3^x + \frac{1}{2}} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{\left(\frac{3^x}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{2}\cdot\left(\frac{3^x}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 3^x+1$$

c) $\quad \left(1-\frac{x^2}{y^2}\right) : \left(\frac{x}{y}+1\right)$

Da $\frac{x^2}{y^2} = \left(\frac{x}{y}\right)^2$ entspricht der Zähler dem Muster der dritten binomischen Formel:

$$\left(1-\frac{x^2}{y^2}\right) : \left(\frac{x}{y}+1\right) = \frac{\left(1-\frac{x^2}{y^2}\right)}{\left(\frac{x}{y}+1\right)} = \frac{\left(1-\frac{x}{y}\right)\cdot\left(1+\frac{x}{y}\right)}{\left(\frac{x}{y}+1\right)} = \left(1-\frac{x}{y}\right)$$

d) $\frac{x^2-6x+9}{3x-9}$

Der Zähler entspricht der zweiten Binomischen Formel, und im Nenner kann der Faktor 3 ausgeklammert werden:

$$\frac{(x-3)^2}{3(x-3)}$$

Der Faktor $x-3$ kann gekürzt werden, damit der Ausduck dabei unverändert bleibt muss aber dessen Definitionsbereich angegeben werden:

$$\frac{(x-3)^2}{3(x-3)} \quad \text{mit } x \neq 3$$

$$\frac{(x-3)^2}{3(x-3)} \quad |:(x-3)$$

$$\frac{x-3}{3} \quad , \ x \neq 3$$

Der Definitionsbereich kann z.B. auch als $D = \{x | x \in \mathbb{R}, x \neq 3\}$ oder $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ angegeben werden.

Ohne Angabe des Definitionsbereichs wäre der letzte Ausdruck für den Wert 3 definiert, was für den ursprünglichen Ausdruck nicht gilt – womit sie sich an der Stelle x=3 unterscheiden würden. Damit wäre es dort nicht der selbe Ausdruck.

e) $\frac{2\sqrt{8}-3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$

Da $8 = 2 \cdot 4$ gilt ist $\sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 4} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{4} = 2\sqrt{2}$

Damit ist $\frac{2\sqrt{8}-3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{2 \cdot 2\sqrt{2}-3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$ und $\sqrt{2}$ kann im Zähler ausgeklammert werden:

$$\frac{\sqrt{2}(4-3)}{2\sqrt{2}}$$ nach berechnen der Klammer und Kürzen von Wurzel 2 bleibt:

$$\frac{1}{2}$$

Aufgabe 4: Umstellen von Gleichungen

Stellen Sie die Gleichung nach μ um: $P = \frac{F}{d\pi\left(\frac{d}{4}+\mu h\right)}$

Das μ nach dem Aufzulösen ist befindet sich innerhalb der Klammer im Nenner des Bruchterms auf der rechten Seite der Gleichung. Daher wird die Gleichung mit dem Faktor, der μ enthält (der Klammer), multipliziert:

$$P = \frac{F}{d\pi\left(\frac{d}{4}+\mu h\right)} \quad | \cdot \left(\frac{d}{4}+\mu h\right)$$

Dank dieses Rechenschritts ist nun auf der linken Seite ein Produkt entstanden. Da nach μ aufgelöst werden soll wäre ausmultiplizieren der linken Seite nicht hilfreich, da μ danach an zwei Stellen verteilt wäre. Statt dessen wird durch P dividiert:

$$P \cdot \left(\frac{d}{4}+\mu h\right) = \frac{F}{d\pi} \quad | :P$$

Die Klammer auf der linken Seite ist nun unnötig, und der Summand ohne μ kann subtrahiert werden:

$$\frac{d}{4}+\mu h = \frac{F}{P d\pi} \quad | -\frac{d}{4}$$

Zuletzt muss noch durch h geteilt werden:

$$\mu h = \frac{F}{P d\pi}-\frac{d}{4} \quad | :h$$

$$\mu = \frac{F}{P d h\pi}-\frac{d}{4h}$$

Die umgestellte Formel kann falls gewünscht auch auf einen Bruchstrich geschrieben werden:

$$\mu = \frac{F}{P d h\pi}-\frac{d}{4h} = \frac{4F-P d^2\pi}{4 P d h\pi}$$

Aufgabe 5: Gleichungslösen

Lösen Sie die Gleichungen nach x auf:

a) $$\frac{8}{3}\left(6x-\frac{a}{2}\right) - \frac{3}{2}\left(8x+\frac{1}{3}\right) = 4x - \frac{1}{2} - \frac{4}{5}\left(10x-\frac{5}{8}\right) + \frac{7}{2}$$

Um nach x auflösen zu können müssen zunächst die Klammern ausmultipliziert werden. Um die Werte nicht unnötig groß werden zu lassen sollte dabei direkt sinnvoll gekürzt werden:

$$\begin{aligned}
&\frac{8}{3}\left(6x-\frac{a}{2}\right) - \frac{3}{2}\left(8x+\frac{1}{3}\right) = 4x - \frac{1}{2} - \frac{4}{5}\left(10x-\frac{5}{8}\right) + \frac{7}{2}\\
&= \frac{2\cdot 4}{3}\left(2\cdot 3x-\frac{a}{2}\right) - \frac{3}{2}\left(2\cdot 4x+\frac{1}{3}\right) = 4x - \frac{1}{2} - \frac{4}{5}\left(2\cdot 5x-\frac{5}{2\cdot 4}\right) + \frac{7}{2}\\
&= 16x - \frac{4}{3}a - 12x - \frac{1}{2} = 4x - \frac{1}{2} - 8x + \frac{1}{2} + \frac{7}{2}
\end{aligned}$$

Nun (bzw. können derartige Rechenschritte auch schon zwischendurch erledigt werden) werden auf beiden Seiten die Summanden zusammengefasst, mit denen dies möglich ist, dann werden alle Terme mit x auf einer Seite der Gleichung gesammelt, alle ohne x auf der anderen:

$$16x - \frac{4a}{3} - 12x - \frac{1}{2} = 4x - \frac{1}{2} - 8x + \frac{1}{2} + \frac{7}{2}$$

$$4x - \frac{4}{3}a - \frac{1}{2} = -4x + \frac{7}{2} \qquad \left| +4x + \frac{1}{2} + \frac{4}{3}a\right.$$

$$8x = 4 + \frac{4a}{3} \qquad |\ :8$$

$$x = \frac{1}{2} + \frac{a}{6}$$

b) $\frac{4}{x+1} = \frac{7}{4x+4} + \frac{3}{2x-2}$

Bruchterme verschiedener Nenner sollen addiert bzw. verglichen werden. Die Nenner von links nach rechts lauten $x+1,$ $4x+4=4(x+1)$ und $2x-2=2(x-1)$.

Hauptnenner wäre also $4(x+1)(x-1)=4x^2-4$

Da nach x aufgelöst werden soll stellt das gleichnamig machen der Brüche einen Umweg dar (am Ende muss x im Zähler stehen). Statt dessen ist der schnellste Weg eine Multiplikation der Gleichung mit dem Hauptnenner:

$$\frac{4}{x+1} = \frac{7}{4x+4} + \frac{3}{2x-2} \qquad | \cdot 4(x+1)(x-1)$$

$$\frac{4\cdot 4(x+1)(x-1)}{x+1} = \frac{7\cdot 4(x+1)(x-1)}{4(x+1)} + \frac{3\cdot 4(x+1)(x-1)}{2(x-1)}$$

$$4\cdot 4(x-1) = 7\cdot(x-1) + 3\cdot 2(x+1)$$

Zuletzt wird ausmultipliziert und nach x ausgelöst:

$$16x-16 = 7x-7 + 6x+6$$
$$16x-16 = 13x-1$$
$$3x = 15$$

$$x = 5$$

c) $\frac{x+b}{2} = \frac{x-b}{3}$

Die in der Gleichung vorkommende Unbekannte x hat die Nenner 2 oder 3. Da nach x aufgelöst werden soll muss somit im Laufe der Rechnung mit diesen Nennern multipliziert werden. Dies bietet sich also als erster Rechenschritt an:

$$\frac{x+b}{2} = \frac{x-b}{3} \qquad | \cdot 6 = 2\cdot 3$$

$$3(x+b) = 2(x-b)$$

$$3x+3b = 2x-2b \quad | -2x-3b$$

$$x = -5b$$

d) $$\frac{a+n}{(x-n)x(a-x)} = \left(\frac{1}{a-x} + \frac{1}{x-n}\right)\frac{1}{a-n}$$

Da die Gleichung nach x aufgelöst werden soll muss im Laufe der Rechnung mit allen Faktoren multipliziert werden, die im Nenner stehen und x beinhalten.

Auf der rechten Seite der Gleichung steht ein Produkt, und einer der Faktoren dieses Produkts ist eine Summe zweier Brüche. Theoretisch könnte erst diese Summe und danach das Produkt berechnet werden. Da mit den beiden Nennern aus der Klammer ebenfalls multipliziert werden muss wäre das aber ein Umweg. Der schnellste Rechenweg besteht im Multiplizieren der Gleichung mit dem gesamten Hauptnenner:

$$\frac{a+n}{(x-n)x(a-x)} = \left(\frac{1}{a-x} + \frac{1}{x-n}\right)\frac{1}{a-n} \qquad |\cdot(x-n)x(a-x)(a-n)$$

$$(a+n)(a-n) = \left(\frac{1}{a-x} + \frac{1}{x-n}\right)(x-n)x(a-x)$$

$$(a+n)(a-n) = (x-n)x + x(a-x)$$

Nun kann auf der rechten Seite x ausgeklammert werden:

$$(a+n)(a-n) = x\cdot(x-n + a-x)$$

$$(a+n)(a-n) = x\cdot(a-n) \qquad |:(a-n)\neq 0$$

$$x = (a+n)$$

<u>Hinweis:</u> Aufgrund der Aufgabenstellung gilt: $x\neq 0 \wedge x\neq n \wedge x\neq a \wedge a\neq n$
[da kein Nenner gleich Null sein kann]

Aufgabe 6: Polynome

Für $x=3$ gilt $x^3-2x^2-5x+6 = 0$. Für welche anderen Werte von *x* ist dies auch so?

Eine Lösung der gegebenen algebraischen Gleichung dritten Grades ist mit x=3 vorgegeben. Der zugehörige Linearfaktor x-3 wird per Polynomdivision abgespalten:

$$
\begin{array}{l}
(x^3-2x^2-5x+6) : (x-3) = x^2+x-2 \\
\underline{-(x^3-3x^2)} \\
x^2-5x+6 \\
\underline{-(x^2-3x)} \\
-2x+6 \\
\underline{-(2x+6)} \\
0
\end{array}
$$

Die Polynomdivision geht ohne Rest auf. Es gilt also: $(x^3-2x^2-5x+6) = (x-3)\cdot(x^2+x-2)$

Die Nullstellen des Restpolynoms (x^2+x-2) können (z.B. per pq-Formel) bestimmt werden:

$$x_{1/2} = -\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-(-2)}$$

$$x_{1/2} = -\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}}$$

$$x_{1/2} = -\frac{1}{2}\pm\frac{3}{2}$$

$$x_1 = 1,\ x_2 = -2$$

Es gilt also: $(x^3-2x^2-5x+6) = (x-3)\cdot(x-1)\cdot(x+2)$

Aufgabe 7: Textaufgabe

Stromanbieter A bietet einen Arbeitspreis von 25ct/kWh bei einem Grundpreis von 15€/ Monat. Anbieter B bietet 28ct/kWh bei einem Grundpreis von 12€ pro Monat. Bei welchem monatlichen Verbrauch ist Anbieter B günstiger?

Wir definieren die Unbekannte **x** als '*Stromverbrauch pro Monat in Kilowattstunden*':

Für Anbieter A betragen die Kosten K in Euro abhängig vom Stromverbrauch x:

$$K(x) = 15+\frac{1}{4}x$$

Für Anbieter B betragen die Kosten K in Euro abhängig vom Stromverbrauch x:

$$K(x) = 12+\frac{28}{100}x = 12+\frac{7}{25}x$$

Gefragt ist, bei welchem monatlichen Verbrauch Anbieter B günstiger ist. Da Anbieter B einen geringeren Grundpreis als Anbieter A bietet, dafür aber höhere Verbrauchsgebühren erhebt, muss dies ein Maximalwert sein:

Bis zu welchem monatlichen Verbrauch ist Anbieter B günstiger?

$$12+\frac{7}{25}x < 15+\frac{1}{4}x \quad |-12-\frac{1}{4}x$$

$$\frac{7}{25}x-\frac{1}{4}x < 3 \quad |\cdot 100$$ Die Gleichung wird mit dem Hauptnenner 100 multipliziert

$$28x-25x < 300$$ Zusammenfassen:

$$3x < 300 \quad |:3$$

$$x < 100$$

Lösung: Bei einem Verbrauch unter 100 Kilowattstunden im Monat ist Anbieter B günstiger.

Aufgabe 8: Funktionsgraphen

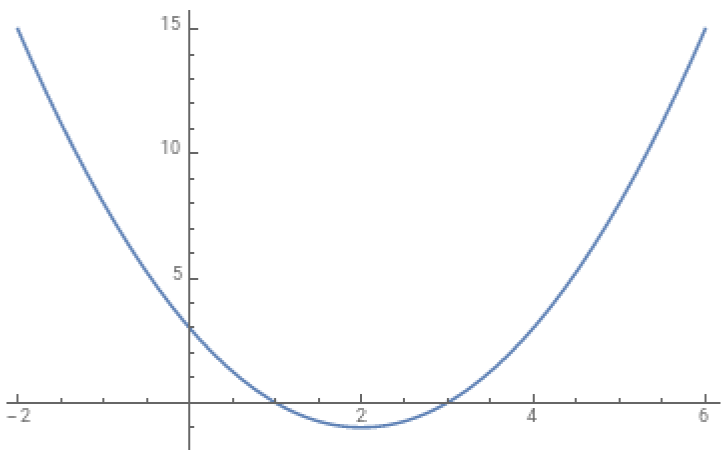
Skizzieren Sie die Funktionen in dem unten angegebenen Koordinatensystem

a) $y = (x-2)^2 - 1$

Die gegebene Form der Parabelgleichung lässt sich schnell in die Scheitelpunktsform überführen: $y+1 = (x-2)^2$

Die allgemeine Scheitelpunktsform mit Scheitelpunkt (x_S, y_S) lautet $y - y_S = (x - x_S)^2$

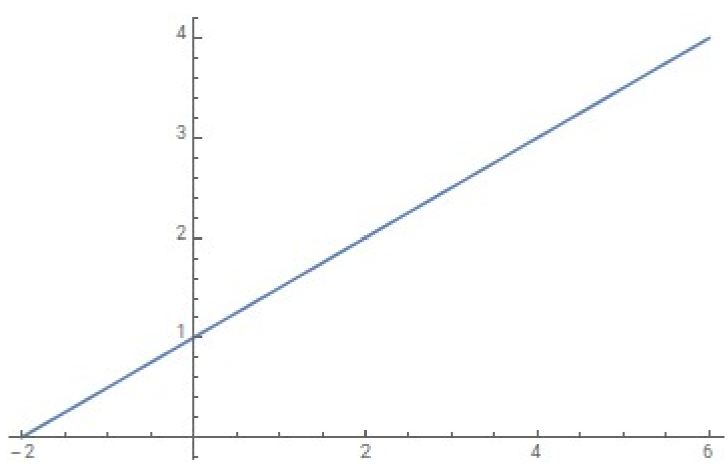
Der Scheitelpunkt dieser Parabel liegt also bei (2, -1). Die Nullstellen lassen sich durch kurze Überlegung bestimmen: Da $y=0$ gilt muss $(x-2)^2=1$ sein. x ist also 1 oder 3:



b) Bei $1 = -\frac{x}{2} + \frac{3y}{4}$ handelt sich um eine Gerade in Achsenabschnittsform.

Diese kann durch einfache Umformung in Polynomform gebracht werden: $y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$

Es handelt sich um eine Gerade mit einer Steigung von zwei Drittel und dem Achsenabschnitt vier Drittel:



c) $y = \sin(2\pi x) + 3$

Die Funktion $y = \sin x$ verläuft periodisch mit einer Periodenlänge von 2π.

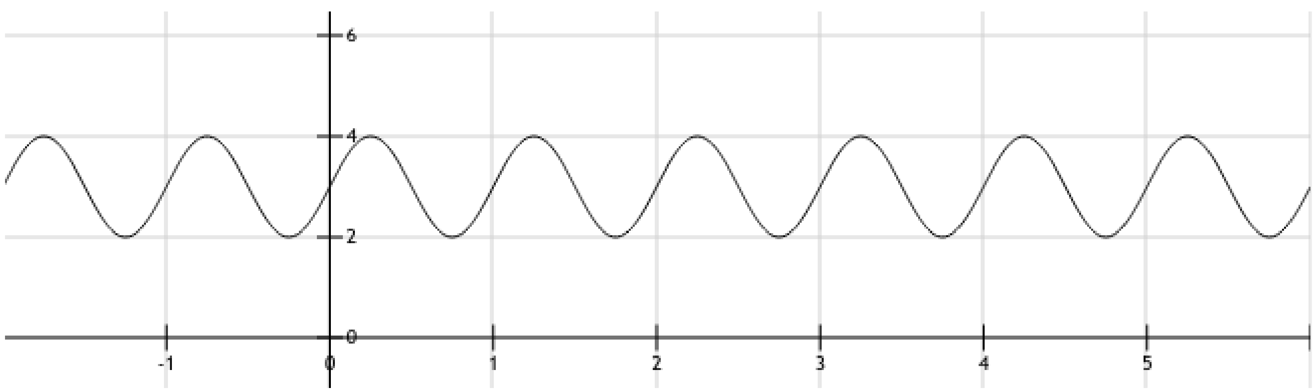
Bei der hier gegebenen Sinusfunktion lautet das Argument jedoch $2\pi x$.

Daraus folgt, dass die hier gegebene Funktion eine Periode von 1 hat, denn der Bereich von Null bis zwei Pi (Periode von sin x) wird hier für die Werte von 0 bis 1 durchlaufen.

Die Amplitude (maximaler Ausschlag nach oben und unten) ist bei sin x gleich 1, die Funktionswerte der Sinus- wie auch der Kosinusfunktion verlaufen im Intervall $y \in [-1,1]$.

Die Amplitude der hier gegebenen Funktion bleibt unverändert, da auch hier der Koeffizient der Sinusfunktion 1 ist.

Das am Ende stehende **+3** verschiebt den Funktionsgraphen um drei Einheiten nach oben entlang der Y-Achse, somit liegen die Funktionswerte hier im Intervall $y \in [2,4]$.



Aufgabe 9: Ungleichungen

Bestimmen Sie die Lösungsmengen der Ungleichungen.

a) $3x + 8 > 12$

Lineare Ungleichungen lassen sich direkt lösen, indem x auf eine und alles andere auf die andere Seite des Relationszeichens gebracht wird:

$$3x + 8 > 12 \quad |-8 \quad |:3$$

$$x > \frac{4}{3}$$

Gefragt ist nach der Lösungsmenge, diese muss also noch angegeben werden. Für Lösungsmengen von Ungleichungen bieten sich meist Intervalle an:

$$L = \left(\frac{4}{3},\ \infty\right) =]\frac{4}{3},\ \infty[$$

b) $2x^2 - 4x < 6$

Quadratische Ungleichungen können nur mit Wissen über Parabeln und den entsprechenden Methoden gelöst werden.

Dazu werden alle Summanden auf eine Seite der Ungleichung gebracht, damit auf der anderen Seite Null steht. Die Nullstellen der Parabel führen dann direkt zur Lösung der Ungleichung:

$$2x^2 - 4x - 6 < 0$$

$2(x^2 - 2x - 3) < 0$ Zur Verwendung der p/q-Formel wird der Faktor 2 ausgeklammert

Bestimmung der Nullstellen:

$$x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{\frac{2^2}{4} + 3} \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1 \ \wedge \ x_2 = 3$$

Die Parabel hat also die Linearfaktoren (x+1) und (x-3):

$$2(x+1)(x-3) < 0$$

Diese Parabel ist nach oben geöffnet, und gefragt ist wo sie kleiner als Null ist. Das muss zwischen den Nullstellen sein:

Lösungsmenge: $L =]-1,\ 3[$

c) $\frac{4+x}{x-4} \leqslant \frac{3}{2}$

Bei dieser Ungleichung befindet sich ein Faktor mit der Unbekannten (hier x) im Nenner. Um die Ungleichung zu lösen muss also im Laufe der Rechnung mit dem Faktor (x-4) multipliziert werden. Da x-4 abhängig von x negativ (x<4) oder nicht negativ sein kann, bei einer Ungleichung aber bei Multiplikation (und Division) mit einem negativen Wert das Relationszeichen gespiegelt werden muss, müssen beide Möglichkeiten einzeln gerechnet werden:

Rechenschritt: $\frac{4+x}{x-4} \leqslant \frac{3}{2} \quad |\cdot(x-4)$

Fallunterscheidung:

[Hinweis: Die Möglichkeit x=4 entfällt hier, da bei x=4 der Nenner Null wäre und die Ungleichung somit den Definitionsbereich $\mathbb{R}\setminus\{4\}$ hat.]

1. Fall: $x-4>0 \iff x>4$	**2. Fall:** $x-4<0 \iff x<4$
$4+x \leqslant \frac{3}{2}\cdot(x-4)$	$4+x \geq \frac{3}{2}\cdot(x-4)$
$4+x \leqslant \frac{3x}{2}-6 \quad \lvert +6-x$	$4+x \geq \frac{3x}{2}-6 \quad \lvert +6-x$
$10 \leqslant \frac{x}{2} \quad \lvert \cdot 2$	$10 \geq \frac{x}{2} \quad \lvert \cdot 2$
$20 \leqslant x$	$20 \geq x$
Die Lösungsmenge *für den 1. Fall* muss **beide** Bedingungen ($x>4 \wedge x \geq 20$) erfüllen:	Die Lösungsmenge *für den 2. Fall* muss **beide** Bedingungen ($x<4 \wedge x \leqslant 20$) erfüllen:
$L_1 = [20,\ \infty[$	$L_2 = [-\infty,\ 4[$

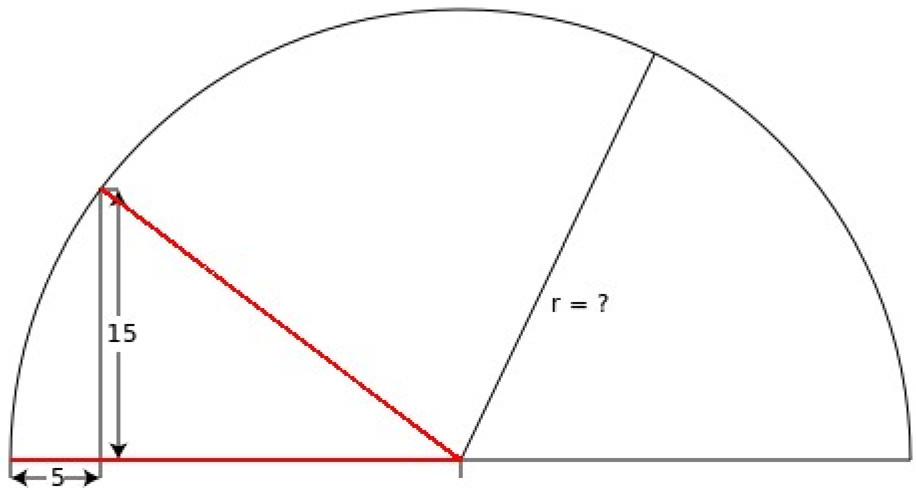
Die Lösungsmenge der Aufgabe ist die Vereinigungsmenge der beiden Lösungsmengen:

Lösungsmenge $L = L_1 \cup L_2 = [-\infty,\ 4[\ \cup\ [20,\ \infty[\ = \mathbb{R}\setminus[4,\ 20[$

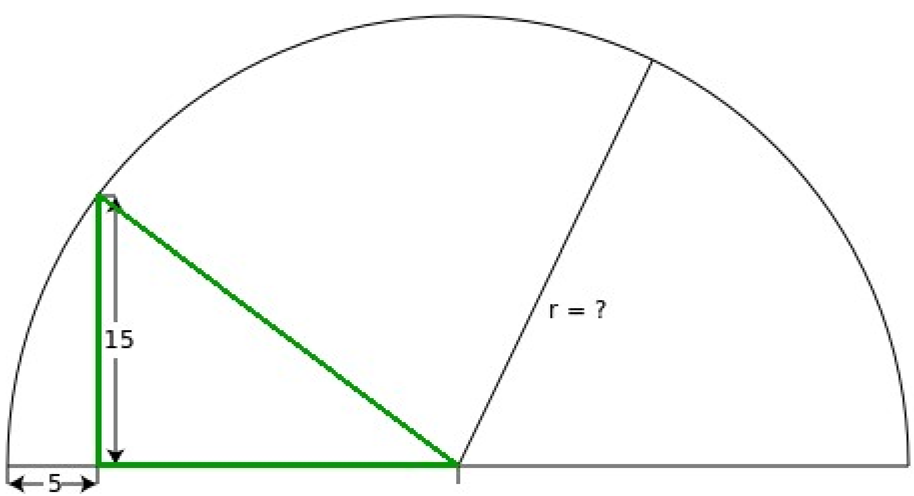
<u>Aufgabe 10: Geometrie</u>

Bestimmen Sie den Radius dieses Halbkreises. Die Strecke der Länge 15 steht senkrecht auf dem Durchmesser. Der Radius eines Kreises ist die Länge der Strecke vom Mittelpunkt des Kreises zu einem beliebigen Punkt auf dem Kreisbogen.

Hier die für diese Aufgabe relevanten Radien (rot):



Zur Berechnung des Radius wird das grün eingezeichnete, <u>rechtwinklige</u> Dreieck genutzt:



- Die Hypotenuse ist der gesuchte Radius.
- Die Länge einer Kathete ist 15.
- Die Länge der anderen Kathete ist der gesuchte Radius minus 5:

Dank der bekannten Zusammenhänge kann über den Satz des Pythagoras eine Gleichung mit einer Unbekannten **r** für den gesuchten Radius aufgestellt werden: $r^2 = 15^2 + (r-5)^2$

Das führt zu $r^2 = 225 + r^2 - 10r + 25$ und damit $10r = 250$.

Die Länge des gesuchten Radius beträgt also $r=25$

Aufgabe 11: Gleichungssysteme

Bestimmen Sie jeweils **x** und **y** aus dem gegebenen Gleichungssystem.

a)
$$\begin{aligned} 3x + y &= 1 \\ x - y &= 3 \end{aligned}$$

Das Gauss-Verfahren zum Lösen linearer Gleichungssysteme ist Inhalt des 2. Semesters. Hier geht es über Auflösen einer Gleichung und Einsetzen in die zweite auch sehr schnell und einfach:

$$\begin{aligned} x - y &= 3 \quad |+y \\ x &= 3 + y \end{aligned}$$

eingesetzt in die erste Gleichung:

$$\begin{aligned} 3x + y &= 1 \\ 3(3+y) + y &= 1 \\ 9+4y &= 1 \quad |-9 \quad |:4 \\ y &= -2 \end{aligned}$$

damit lässt sich x bestimmen:

$$\begin{aligned} x &= 3 + y \\ x &= 3 - 2 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Hinweis: Auf der nächsten Seite finden Sie die Lösung der Aufgabe 11b). Gegen Ende des Lösungsweges sind einige Rechenschritte nötig, die vielen von Ihnen ohne Taschenrechner Probleme bereiten könnten. Natürlich könnten Sie diese Rechnung mit dem Taschenrechner lösen – allerdings nicht in einer Mathematikprüfung, da Taschenrechner dort nicht zugelassen sind!

Nutzen Sie die Möglichkeit, Rechenwege in weniger komplexe Nebenrechnungen aufzuteilen und Zusammenhänge zu erkennen. Betrachten Sie dies auch als Übung, eine analytische und strukturierte Denkweise zu entwickeln, die für die MINT-Fächer notwendige Voraussetzung ist. Die Benutzung eines Taschenrechners verhindert dies.

b) $\frac{2}{3}x + \frac{3}{2}y = 12$ Vorgehen äquivalent zu a):

$\frac{3}{2}x + \frac{2}{3}y = 6$

$$\frac{2}{3}x + \frac{3}{2}y = 12 \quad |\cdot 6$$ Multiplikation mit dem Hauptnenner

$$4x + 9y = 72 \quad |-9y \quad |:4$$

$$x = 18 - \frac{9}{4}y$$

eingesetzt in die zweite Gleichung:

$$\frac{3}{2}\left(18 - \frac{9}{4}y\right) + \frac{2}{3}y = 6$$

$$27 - \frac{27}{8}y + \frac{2}{3}y = 6 \quad |-27$$

$$-\frac{27y}{8}\cdot\frac{3}{3} + \frac{8}{8}\cdot\frac{2}{3}y = -21$$

$$\frac{16-81}{24}y = -21$$

$$-\frac{65}{24}y = -21 \quad |\cdot\left(-\frac{24}{65}\right)$$

$$y = \frac{504}{65}$$

damit lässt sich x bestimmen:

$$x = 18 - \frac{9}{4}y$$

$$x = 18 - \frac{9}{4}\cdot\frac{504}{65}$$ *<u>Kürzen</u> statt Ausmultiplizieren*: 504 : 4 = 126

$$x = 18 - \frac{9\cdot 126}{65}$$

$$x = 18\cdot\frac{65}{65} - \frac{10\cdot 126 - 126}{65}$$ Der *<u>gesamte</u>* Bruch wird subtrahiert

$$x = \frac{18\cdot 65 - (1260 - 126)}{65}$$ Auf einem Bruchstrich sind jetzt Klammern nötig

$$x = \frac{20\cdot 65 - 2\cdot 65 - 1134}{65}$$

$$x = \frac{1300 - 130 - 1134}{65}$$ Rechenschritte als Beispiele/ Hinweise, wie ohne

$$x = \frac{1170 - 1134}{65}$$ Taschenrechner gerechnet werden kann

$$x = \frac{36}{65}$$

Aufgabe 12: Logarithmengleichungen

Lösen Sie die Gleichungen

a) $\log_2[8(5x+3)] - \log_2(7x+1) = 3$ 2. Logarithmenregel:

$$\log_2\left(\frac{8(5x+3)}{7x+1}\right) = 3$$

$$\log_2\left(8\cdot\frac{5x+3}{7x+1}\right) = 3$$ 1. Logarithmenregel:

$$\log_2 8 + \log_2\left(\frac{5x+3}{7x+1}\right) = 3 \quad |-3$$ Da $\log_2 8 = \log_2(2^3) = 3$

$$\log_2\left(\frac{5x+3}{7x+1}\right) = 0 \quad |2^{()}$$ Umkehrfunktion zu $\log_2 x$ ist 2^x

$$2^{\log_2\left(\frac{5x+3}{7x+1}\right)} = 2^0$$

$$\frac{5x+3}{7x+1} = 1 \quad |\cdot(7x+1)$$

$$5x+3 = 7x+1 \quad |-5x-1$$

$$2x = 2 \quad |:2$$

$$x = 1$$

b) $3\ln x - 2\ln(x^3) + 3\ln(x^2) + \log_2(16) = 4$ 3. Logarithmenregel:

$3\ln x - 2\cdot 3\ln x + 3\cdot 2\ln x + \log_2(16) = 4 \quad |-4$ Da $\log_2 16 = \log_2(2^4) = 4$

$3\ln x = 0$ Damit muss **x=1** die Lösung sein, denn dies ist die einzige Nullstelle der Logarithmusfunktion.

Formaler weiterer Rechenweg über Gleichungslösen:

$$3\ln x = 0 \quad |:3$$

$$\ln x = 0 \quad |e^{()}$$ Umkehrfunktion zu $\ln x = \log_e x$ ist e^x

$$x = e^0$$

$$x = 1$$

Aufgabe 13: Exponentialgleichungen

Lösen Sie die Gleichungen

a) $13^{x^2-1} = 1$

Da sich x im Exponenten befindet muss eine passende Umkehrfunktion verwendet werden. Einfachste Möglichkeit: $\log_{13} x$

$$\begin{aligned} 13^{x^2-1} &= 1 \quad | \log_{13} x \\ \log_{13}\left(13^{x^2-1}\right) &= \log_{13} 1 \\ x^2-1 &= 0 \\ (x-1)(x+1) &= 0 \end{aligned}$$

Die linke Seite entspricht der 3 Binomischen Formel:

Ein Produkt ist gleich Null wenn mindestens einer der Faktoren gleich Null ist.
Die Lösungen lauten also $x_{1/2} = \pm 1$

b) $e^{x-3} \cdot e^{1+x} = 4$

1. Potenzrechenregel:

$$\begin{aligned} e^{x-3+1+x} &= 4 \\ e^{2x-2} &= 4 \\ e^{2(x-1)} &= 4 \end{aligned}$$

Umkehrfunktion zu e^x ist $\ln x = \log_e x$

$$\begin{aligned} e^{2(x-1)} &= 4 \quad | \ln \\ \ln\left(e^{2(x-1)}\right) &= \ln 4 \\ 2(x-1) &= \ln\left(2^2\right) \end{aligned}$$

3. Logarithmenregel:

$$\begin{aligned} 2(x-1) &= 2\ln 2 \quad |:2 \\ x-1 &= \ln 2 \quad |+1 \end{aligned}$$

$x = 1 + \ln 2$

Hinweis: Diese Lösung ist exakt und damit einer z.B. mit Taschenrechner berechneten gerundeten Lösung vorzuziehen!

Aufgabe 14: Exponentialfunktion

Bestimmen Sie die Gleichung der Exponentialfunktion
$y = ba^x$ durch die Punkte P(2 / 1) und Q (3 / 5)

In der Funktionsgleichung befinden sich die beiden Parameter **a** und **b**. Gegeben sind zwei Punkte auf dem Funktionsgraphen – also zwei x-y-Wertepaare, die die Funktionsgleichung erfüllen, d.h. sie zu einer wahren Aussage machen.

Einsetzen der beiden Wertepaare führt zu zwei Gleichungen mit 2 Unbekannten – also das Prinzip von Aufgabe 11:

$$ba^3 = 5$$
$$ba^2 = 1$$

Beide Gleichung lassen sich gut nach b umstellen. Wir verwenden hier die zweite:

$$ba^2 = 1 \quad | : a^2$$
$$b = \frac{1}{a^2}$$

Einsetzen in die erste Gleichung führt zu einer Gleichung mit einer Unbekannten:

$$ba^3 = 5$$
$$\frac{1}{a^2} \cdot a^3 = 5 \qquad \text{Kürzen von } a^2$$
$$a = 5$$

Damit ergibt sich $b = \frac{1}{a^2} = \frac{1}{25}$

Lösung:

Die gesuchte Funktionsgleichung lautet $5^{(x-2)} = y$ da $\frac{1}{25} \cdot 5^x = \frac{5^x}{5^2} = 5^{(x-2)}$