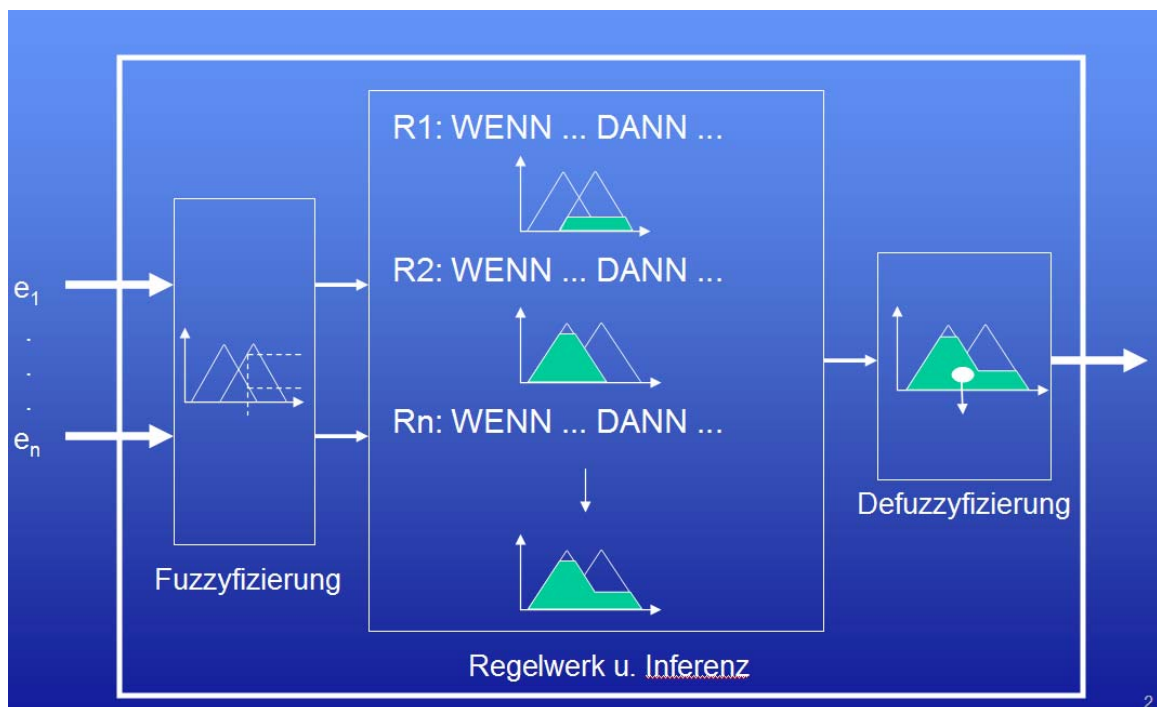


Computational Intelligence

Fuzzy-Tutorial



Fuzzy Tutorial: Fuzzy-Logik in Theorie und Praxis

Inhaltsverzeichnis:

Vorwort	5
Einleitung und Motivation.....	5
1. Einführung	6
2. Theorie unscharfer Mengen	14
2.1 Basisdefinitionen	14
2.2 Modellierung unscharfer Mengen mittels Zugehörig-keitsfunktionen.....	16
2.2 Grundbegriffe unscharfer mathematischer Objekte.....	36
2.3.1 Unscharfer Punkt.....	36
2.3.2 Unscharfe Relationen: Modellierung fuzzy- wertiger Relationen.....	37
2.3.3 Unscharfe Funktionen	39
2.4 Mengenalgebraische Operationen	40
2.4.1 Elementare Operationen.....	40
2.4.2 Kompensatorische Operatoren.....	46
2.4.3 Schnittbildung: Modellierung Niveauewerte als Teilmengen.....	46
2.4.4 Rechengesetze für unscharfe Mengen	48
2.4.5 Struktureigenschaften.....	49
2.4.5 Binäre Operationen: Konzept t-Norm	52
3. Unscharfe Relationen	59
3.1 Mathematische Grundbegriffe	60
3.2 Relationen und Rechenregeln	63
3.3 Fuzzy-Inferenz.....	73
3.3.1 Erinnerung klassische Logik.....	73
3.3.2 fuzzy-logisches Schließen	73
4. Analyse und Design von Fuzzy-Systemen	77
4.1 Grundidee bei Fuzzy-Systemen	77
4.2 Methoden des Fuzzy Control.....	79
4.2.1 Methode von Mamdani	79
Beispiel: Inverses Pendel	84
4.2.2 Methode von Sugeno	99
4.2.3 Analytische Betrachtungen für den Sugeno- Con-troller.....	101
4.2.4 Sliding Mode Fuzzy Control (FC).....	108
5. Anmerkungen zu Neuro-Fuzzy-Systeme	114
6. Schlussbemerkung	116

6.1	Softwareprodukte	116
6.2	Hardware.....	116
6.3	Zeitschriften.....	116
	Literaturverzeichnis.....	118

Fuzzy-Tutorial: Fuzzy-Logik in Theorie und Praxis

Vorwort

Dieses Tutorial ist als Einführung in die mathematischen Grundlagen sowie die für die Fuzzy-Logik spezifischen Arbeitsmethoden gedacht. Es ist schwerpunktmäßig praxisorientiert, die theoretischen Grundlagen sind auf die wichtigsten Begriffsbildungen beschränkt – aktuelle Beiträge zur Fuzzy-Logik befinden sich in Tagungsbänden über dieses Thema und Zeitschriften.

Einleitung und Motivation

Die Fuzzy-Logik bietet reichhaltige Möglichkeiten zum Beispiel technische Prozesse zu denen kein unmittelbarer mathematischer Zugang besteht, Systeme mit nichtlinearer Charakteristik aber auch Probleme der Datenanalyse, volks- und betriebswirtschaftliche Probleme, etc. über eine linguistische Formulierung zu beschreiben. Obwohl schon technische Produkte mittels der Fuzzy-Technologie marktreif wurden, wird die Fuzzy-Methodik noch weiter entwickelt werden müssen um mittels der Fuzzy-Technologie noch weitere Bereiche befruchten zu können.

Es wird eindringlich davor gewarnt die Fuzzy-Mathematik insbesondere die Fuzzy-Logik als eine Methode zu betrachten, die die herkömmliche Mathematik oder die Systemtheorie und Dynamik komplexer Systeme überflüssig macht. Fuzzy-Mathematik und Fuzzy-Logik repräsentieren lediglich eine neue mathematische Plattform innovativ zu denken, zu modellieren, inhaltsberücksichtigendes Wissen und algorithmisches Wissen in Expertensystemen geeignet zu beschreiben.

Auf der Ebene des menschlichen Schlussfolgerns sind viele Begriffe inhärent unscharf, so z.B. bezüglich des subjektiven menschlichen Denkens, der subjektiven Beschreibung von Sachverhalten etc. Aber auch auf der phänomenologischen Ebene der elementaren biologischen Prozesse, finden wir Unschärfe. Beispielsweise werden bei der Generierung eines Aktionspotentials auf bzw. an dem Neuron Faltungsprozesse mit unscharfer Eingangsinformation ausgeführt, abgesehen davon, dass das Neuron selbst ein hoch komplexes dynamisches "Bauelement" repräsentiert, innerhalb dessen hochparallele Prozesse ablaufen.

Als "unscharfe Logik" (fuzzy logic) bezeichnete L.A. Zadeh (/Za 1-3/) die von ihm schon 1965 begründete Theorie zur Beschreibung und Verknüpfung unscharfer Mengen (fuzzy sets),

die eine Verallgemeinerung der gewöhnlichen Mengenlehre darstellt. Damit stellt die gewöhnliche Mengenlehre mit ihrem 0/1-wertigen Zugehörigkeitsbegriff ein Grenzfall der unscharfen Mengenlehre dar. Das Konzept von Zadeh für unscharfe Mengenzugehörigkeiten, wie sie oft bei einer qualitativen Beschreibung beispielsweise von Daten und Objekten auftreten, stellte sich bei vielen Anwendungen in der Technik als äußerst zweckmäßig heraus. Das Konzept eröffnet die Möglichkeit einer Operationalisierung von qualitativ formuliertem (linguistisch formuliertem) menschlichem Wissen. In Analogie zu deterministischen Variablen wird die linguistische Variable durch Angabe der Werte definiert, die sie annehmen kann. In diesem Fall sind hier die Werte keine Zahlen, sondern inhaltsberücksichtigende sprachliche Ausdrücke, die die menschliche Sprachebene repräsentieren. Nach dem Fuzzy-Konzept werden diese Werte nun inhaltlich durch unscharfe Mengen auf einer physikalisch-numerischen Skala definiert, auf der sogenannten Sprachebene eines Computers. Formal ist somit eine (inhaltliche) Brückenfunktion zwischen menschlichem Wissen und einer maschinenmäßigen Darstellung geschaffen.

1. Einführung

Zadeh hat das mathematische Konzept der "fuzzy sets" (unscharfe Mengen) eingeführt, es beinhaltet: Verallgemeinerung des normalen ("scharfen") Mengenbegriffs bzw. der Mengenlehre. Es wird dadurch möglich: scharfe ("nonfuzzy") und unscharfe ("fuzzy") Daten formal exakt zu behandeln.

Die Motivation von Zadeh war: Die Unschärfe im menschlichen Denken bezüglich Datenrepräsentation und Entscheidungsfindung formal exakt zu behandeln.

Algebra: Der Wertebereich einer Variablen ist exakt (scharf) festgelegt.

Beispiel: Die Menge aller natürlicher Zahlen n zwischen 1 und 5: $\{n \in \mathbb{N} \mid 1 < n < 5\}$,

es sind exakt die Elemente 2, 3 und 4 der Menge $\{2, 3, 4\}$.

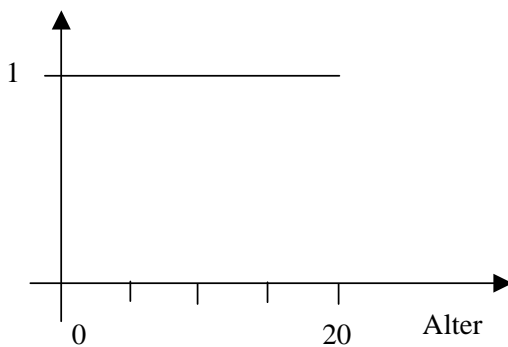
Umgangssprachlich verwenden wir oft unscharfe Formulierungen in der Form "Die Menge aller natürlichen Zahlen viel größer als 1" oder beispielsweise "Die Menge aller mittelgroßer Männer". Bezüglich der Mitglieder der "Elemente" ist die Formulierung "Die Menge aller mittelgroßer Männer" unscharf bezüglich einer Menge definiert.

Allgemeiner formuliert: Zum gewöhnlichen mathematischen (nonfuzzy) Mengenbegriff mit scharfen Grenzen hat ein Fuzzy Set unscharfe Grenzen. Somit: Die scharfen Mengen können als Spezialfall der unscharfen Mengen verstanden werden.

Grundgedanke der Fuzzy Theorie basiert nicht auf den Aussagen wahr (1) oder falsch (0), sondern auf Zwischenwerten. Da-

nach kann jedes Element mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit zu einer bestimmten Menge gehören oder nicht. Jedes Element der "unscharfen" Menge kann mit einem Zugehörigkeitswert ("Zugehörigkeitswahrscheinlichkeit") charakterisiert werden. Die Beschreibung erfolgt durch Einführung unscharfer Mengen und die Charakterisierung einfacher Zusammenhänge (Relationen) mit unscharfen Bedingungsanweisungen (fuzzy conditional statements) der Form: "Wenn A, dann B". Geordnete Anweisungs- bzw. Befehlsfolgen dienen dazu komplexere Beziehungen zu formulieren.

Beispiel: Begriff "jung" verknüpft mit dem Alter eines Menschen



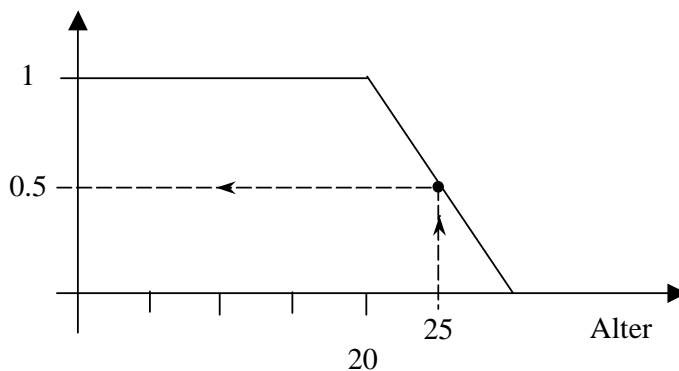
Tag der Geburt

Linguistische Beschreibung: Bis zu einem Alter 20 Jahre können alle Menschen als "jung" charakterisiert werden.
... repräsentiert ein Crisp-Intervall: $A = [0, 20]$

Frage: Warum ist ein Mensch an seinem 20. Geburtstag noch jung und ein Tag danach nicht mehr?

Strukturproblem: Separation jung und nicht jung
 \Leftrightarrow Elemente mit 1, Elemente mit 0

Verallgemeinerung des Konzeptes: Wir erlauben Zwischenwerte im Einheitsintervall $I = [0, 1]$.



Fazit: Eine Person im Alter von 25 Jahren, kann zu 50 % als "jung" angesehen werden, vorausgesetzt ab einem Lebensalter von 30 Jahren werden alle Personen als "alt" angesehen.

Beispiel: Betrachten wir einen Temperaturbereich mit Temperaturwerten dessen Zugehörigkeitsfunktion nur die Werte 0 und 1 hat und dessen Stützmenge nur die Temperaturwerte im Intervall $[110^{\circ}\text{C}, 190^{\circ}\text{C}]$ umfasst, so sprechen wir von einem nonfuzzy set. Der Linguistikausdruck "der Momentanwert ist genau 150°C " kann als fuzzy oder nonfuzzy Singulärset dargestellt werden. Somit wird von einer "nonfuzzy" Größe genau dann gesprochen, wenn ihre Mitgliedsfunktion nur die Werte 0 und 1 hat.

Bem.: Bei der Fuzzy-Modellierung besteht eine wesentliche "Kunst" darin, die Zugehörigkeitsfunktion sinnvoll zu definieren. Im Sinne eines "fuzzy modelling" könnten wir festsetzen: Die universelle Menge U ist die Menge an Temperaturwerten T in dem Intervall $[110^{\circ}\text{C}, 190^{\circ}\text{C}]$, d.h.

$$U = \{T | T \in [110^{\circ}\text{C}, 190^{\circ}\text{C}]\}.$$

Die Fuzzy-Teilmenge $A = \{\text{Temperatur von ungefähr } 150^{\circ}\text{C}\}$ wäre damit der Fuzzy-Subset A aus der universellen Menge U , dessen Mitglieder gemäß dem Temperatur-Graphen gegeben sein könnte. Seine Stützmenge

$$S_A(T) = \{T | \mu_A(T) \geq 0\} = \{T | [110^{\circ}\text{C}, 190^{\circ}\text{C}]\}$$

enthält also alle Temperaturwerte im Intervall $[110^{\circ}\text{C}, 190^{\circ}\text{C}]$.

Je näher der Wert der Mitgliedschaftsfunktion $\mu_A(T)$ bei 1 liegt, desto höher ist der Grad der Zugehörigkeit (Fig. 1.1).

Beispiel: Es wird eine Temperaturregelung in einem Regelbereich von 100°C bis 200°C betrachtet. Ein jahrelang vertrauter Bediener einer Anlage macht die Aussage:

"Es treten Temperaturen von ungefähr 150°C auf." Dieses ist eine vage Aussage (grade of possibility), der Sachverhalt ist modellierbar (Fig.1.1) als unscharfer Temperaturbereich mittels einer Funktion $\mu(T)$, genannt Zugehörigkeitsfunktion (membership function).

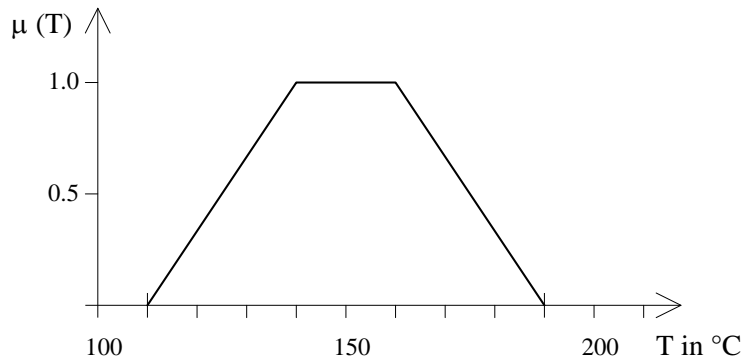


Fig.1.1: Temperaturbereich als Fuzzy Set. Im Bereich 140°C bis 160°C hat die Mitgliedschaftsfunktion $\mu(T)$ den Wert 1 und im Bereich $110^{\circ}\text{C} \leq T < 140^{\circ}\text{C}$ sowie im Intervall $160^{\circ}\text{C} < T \leq 190^{\circ}\text{C}$, Werte zwischen 0 und 1.

Fuzzy Sets sind interpretierbar als eine "Klasse" Sets mit einem Kontinuum von Zugehörigkeitsgraden. Dabei bezeichnet man den funktionellen Zusammenhang eines Elementes x zu einer Menge A als Zugehörigkeitsfunktion $\mu_A(x)$, sie bestimmt den Grad der Zugehörigkeit eines Elementes x aus der Menge A zu der Gesamtheit der Menge A . In anderen Worten, der Grad der Zugehörigkeit von x zum Ereignis A wird durch die Funktion $\mu_A(x)$ bestimmt. Folglich kann $\mu_A(x)$ auch als Bewertungsfunktion bezüglich des Intervalls von 0 bis 1 interpretiert werden. Die Zugehörigkeit $\mu_A(x)=1$ besagt, dass das Element x mit einer Wahrscheinlichkeit von 1.0 zum Ereignis A gehört. Entsprechend charakterisiert $\mu_A(x)=0$, dass Element x nicht zur Menge A gehört. Anschaulich gesprochen bewirken schlanke Mitgliedschaftsfunktionen eine Konzentration von Zugehörigkeitswerten, dagegen breite Funktionen eine Ausdehnung der unscharfen Menge (Fig. 1.2).

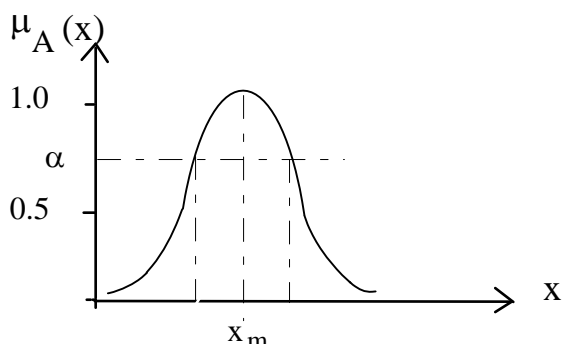


Fig. 1.2: Wird die Zugehörigkeitsfunktion (symmetrisch bezüglich x_m) in der Höhe α geschnitten, so spricht man auch von einem α - Schnitt.

Für die Bewertung einer Zugehörigkeit spielen die Zugehörigkeitsfunktionen eine große Rolle. Zur Veranschaulichung betrachten wir die Druckverhältnisse an einem Ventil (verschiedene Ventilstellungen) bei einer Druckregelung (Fig.3). Für den Druck werden drei Bereiche festgelegt { niedrig, mittel, hoch }.

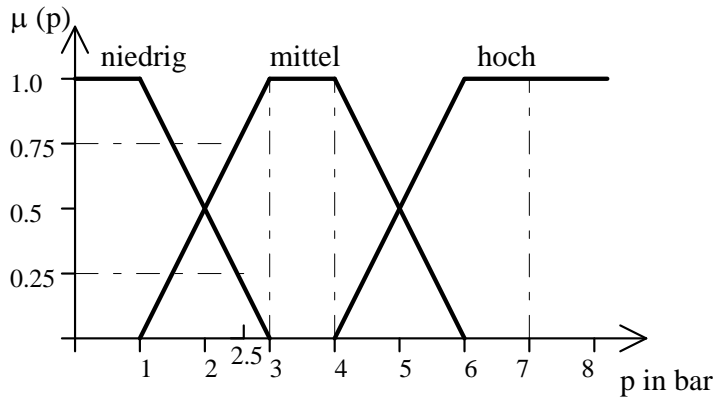


Fig. 1.3: Druckbereiche je nach Ventilstellung.

Für den niedrigen Druckbereich wird das Intervall von 0 bis 3 bar definiert, wobei diese Festlegung einer subjektiven Bewertung zugrunde liegt. Der mittlere Bereich geht von 1 bar bis 6 bar und der höhere Druckbereich geht von 4 bar bis 7 bar. Für einen Druck von 2.5 bar erhalten wir bezüglich des niederen Druckes eine Zugehörigkeit von $\mu(p)= 0.25$ und bezüglich des mittleren Druckes eine Zugehörigkeit von $\mu(p)= 0.75$. Folglich würden wir den Druck von 2.5 bar mehr dem mittlerem Druckbereich zuordnen als den niederen Druckbereich.

In diesem Zusammenhang und für die Charakterisierung einer Schnittmenge von unscharfen Mengen ist der Träger einer unscharfen Menge A von Bedeutung.

Def. Träger:

$$\text{supp}(A) := \{ x \in \mathbf{X} \mid \mu_A(x) > 0 \},$$

es ist die Gesamtheit aller x- Werte, für die die Zugehörigkeitsfunktion größer Null ist. Für die Repräsentation von Fuzzy Mengen ist es oftmals sinnvoll α -Schnitte zu definieren. Als α -Schnitt bezeichnet man eine Gerade, parallel zur x - Achse, die die Zugehörigkeitsfunktion in zwei Teile, einen oberen und einen unteren Bereich zerlegt. Als Zugehörigkeitsfunktion $\mu_\alpha(x)$ wird dann die obere der Zugehörigkeitsfunktion gewählt, es entsteht eine Schnittmenge, die die Variable x (Temperatur, Druck, Stellgröße etc.) einschränkt (Fig. 1.4).

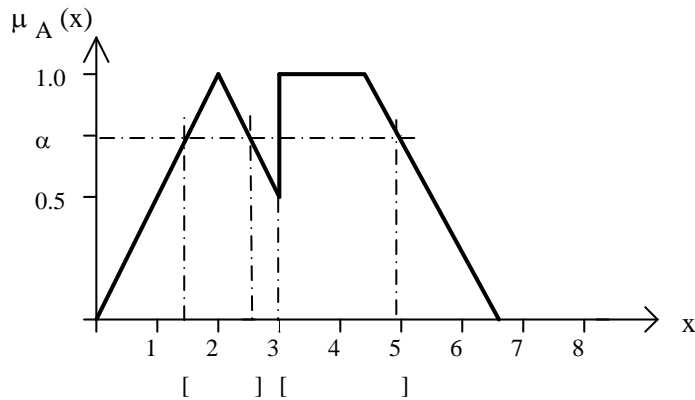


Fig. 1.4: Schnittmenge des α - Schnitts:

$$\mu_\alpha = \left\{ \left[2\alpha, 4 - 2\alpha \right] \cup \left[3, \frac{13}{2} - 2\alpha \right] \text{ für } \alpha \geq 0.5 \right\} .$$

Zusammenfassung:

Darstellung und Interpretation von Fuzzy-Mengen

a) klassischer Mengenbegriff ist zweiwertig

Zu jeder Menge A über einer Grundmenge X existiert eine Funktion

$$f_A : X \rightarrow \{0,1\}$$

die für jedes Element $x \in X$ angibt, ob x **ein Element** der Menge A ist

$$f_A(x) = 1 \Leftrightarrow x \in A ,$$

oder **kein Element** der Menge A ist

$$f_A(x) = 0 \Leftrightarrow x \notin A .$$

b) Konzept der unscharfen Mengen aus logischer Sicht basiert auf der folgenden Idee

... den Zugehörigkeitsgrad eines Elementes als den graduellen Wahrheitswert einer Aussage im Intervall $[0,1]$ zu betrachten (Fig. 1.5, Fig. 1.6).

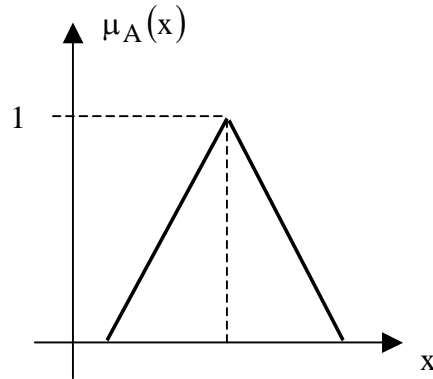


Fig. 1.5: Symmetrische Dreiecksfunktion.

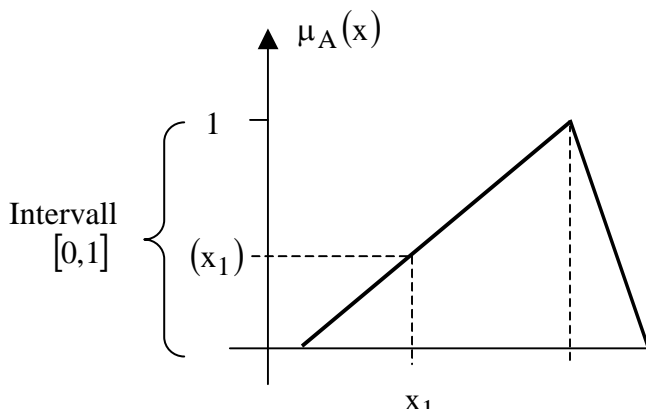


Fig. 1.6: Darstellung $x = \text{Temperatur}$. Interpretation: "Lieber eine etwas zu niedrige Temperatur als eine zu hohe Temperatur".

c) Modellierung einer Fuzzy-Menge A

Benötigt wird eine Funktion, die anstatt in die Menge $\{0,1\}$ in das Intervall $[0,1]$ abbildet:

$$\mu_A : X \rightarrow [0,1] .$$

Jedem Element $x \in X$ kann eine Zahl $\mu_A(x) \in [0,1]$ zugeordnet werden die dem Grad von x zu A repräsentiert.

μ_A heißt **Zugehörigkeitsfunktion**

$\mu_A(x)$ μ_A an der Stelle x , heißt Zugehörigkeitsgrad

d) Fuzzy-Linguistik

Nimmt eine Kenngröße x {
 Temperatur, Druck, Volumen
 Frequenz, Geschwindigkeit,
 Helligkeit, Alter, Abnutzungsgrad, etc.
 medizinische
 elektrische
 chemische oder ökologische Variable

linguistische Werte wie "niedrig", "mittel" oder "hoch" an, so wird sie als linguistische Größe oder Variable bezeichnet. Die durch eine Fuzzy-Menge beschreibbar ist, beispielsweise durch einen Funktionsgraphen mit einem bestimmten Träger.

Die dargestellten Zugehörigkeitsfunktionen (grade of membership oder degree of membership) repräsentieren keine Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten eines Ereignisses. Dafür ist die Wahrscheinlichkeitstheorie zuständig. Die Wahrscheinlichkeitstheorie macht Aussagen über das Auftreten möglicher Ereignisse bei einem sogenannten statischen Prozess. In der Fuzzy-Logik geht es nicht um Wahrscheinlichkeitsgrade (grade of probability) für das Eintreten eines Ereignisses sondern um Möglichkeitsgrade (grade of possibility), etwas vereinfacht dargestellt:

Die Unsicherheit ist zu modellieren. Theoretisch beschreibbar durch Möglichkeits- oder Possibilitätsverteilungen.

Bezüglich der sogenannten Notwendigkeits- oder Necessitätsmaße müssen wir auf die Literatur verweisen, ebenso was den Glaubwürdigkeitsgrad und den Plausibilitätsgrad, den Grad des Einleuchtens betrifft (/Ba1/ Bandemer, Gottwald: Einführung in Fuzzy-Methoden, Akademie Verlag) mit dem Hinweis, dass diese Gegenstände noch theoretisch erklärt werden müssen. Eine umfassende Theorie existiert bisher noch nicht.

In der vorliegenden Darstellung lassen wir uns vom theoretischen Pragmatismus leiten.

2. Theorie unscharfer Mengen

2.1 Basisdefinitionen

Def. 2.1: Eine unscharfe Teilmenge (fuzzy subset) A einer Menge \mathbf{X} ist gekennzeichnet durch ihre Zugehörigkeitsfunktion (membership function)

$$\mu_A : \mathbf{X} \rightarrow [0,1], \quad (2.1)$$

die jedem Element x aus \mathbf{X} eine Zahl $\mu_A(x)$ im Intervall $[0,1]$ zuordnet, die den Grad der Zugehörigkeit von x in A repräsentiert. \mathbf{X} repräsentiert den Grundbereich, der geeignet zu wählen ist. Die scharfen Mengen werden als spezielle unscharfe Mengen interpretiert, bei denen nur die Werte 0 und 1 als Zugehörigkeitswerte vorkommen. Die Gleichheit zweier unscharfer Mengen A und B ist gegeben, wenn die Werte ihrer Zugehörigkeitsfunktion gleich sind: $A=B$, falls $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ für alle $x \in \mathbf{X}$.

Es gibt verschiedene Repräsentationsmöglichkeiten für die Beschreibung von Zugehörigkeitsfunktionen unscharfer Mengen. Diskrete Darstellung mittels Funktionstabellen in der Form

	x_1	x_2	$x_3 \cdots$	x_n
$\mu_A(x)$	0.1	0.5	0.8	0.1

mit z.B. $\mu_A(x_3) = 0.8$ etc. und $\mathbf{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Diese Darstellung können wir mit Hilfe des Begriffs einer Stützmenge verallgemeinern.

Def.2.2: Die Stützmenge von A ("support von A ") ist die Menge S_A aller Elemente ("set of points") in \mathbf{X} mit positivem $\mu_A(x)$.

Def.2.3: Ein Halbpunkt in A ("crossover point") ist ein Element von \mathbf{X} , dessen Mitgliedschaft exakt 0,5 beträgt.

Def.2.4: Ein Fuzzy-Singulärtest ("fuzzy singleton") ist ein Fuzzy Set, dessen Stützmenge genau ein Element aus \mathbf{X} umfasst.

Bemerkung zur Notation: Wenn ein Fuzzy Set als Stützmenge $\{x\}$ nur ein einziges Element mit positivem $\mu(x)$ besitzt, dann wird geschrieben

$$A = \mu/x, \quad (2.2)$$

wobei μ der Mitgliedschaftsgrad von x in A ist. Folge: Ein Nonfuzzy-Singulärtest kann als $1/x$ geschrieben werden.

Bemerkung: Die Verknüpfungen zwischen Fuzzy Sets sind analog definiert zu der Definition von gewöhnlichen Mengen.

Wenn die Stützmenge $S_A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ von A diskret und endlich ist, dann gilt die Summendarstellung:

$$A = \mu_A(x_1)/x_1 + \mu_A(x_2)/x_2 + \dots + \mu_A(x_n)/x_n := \sum_{i=1}^n \mu_A(x_i)/x_i \quad (2.3)$$

Summendarstellung vereinfacht geschrieben bei endlichem Grundbereich:

$$A = \mu_1/x_1 + \dots + \mu_n/x_n = \sum_{i=1}^n \mu_i/x_i, \quad (2.4)$$

wobei μ_i , $i=1, \dots, n$, den Grad der Zugehörigkeit von x_i in A bezeichnet. Das Pluszeichen "+" bedeutet die Vereinigung gemäß Gl. 2.3 und nicht die arithmetische Summe. Anstelle von vorstehender Formulierung kann abkürzend geschrieben werden:

$$A = \sum_{x \in X} \mu_A(x)/x. \quad (2.5)$$

Das Summenzeichen \sum als auch das nachfolgende Integralzeichen \int sind abkürzende Symbole, die Zeichen werden nicht als Operationszeichen benutzt und ebenso das Zeichen "/".

Ist der Grundbereich X unendlich, wird das Summenzeichen symbolisch durch das Integralzeichen ersetzt und geschrieben:

$$A = \int_{x \in X} \mu_A(x)/x \quad (2.6)$$

Ein Fuzzy Set A kann als die Vereinigung seiner konstituierenden Singulärsets interpretiert werden (/Za3/), wobei das Summenzeichen oder das Integralzeichen für die Vereinigung des Fuzzy Singulärsets $\mu_A(x)/x$ steht.

Der Zugehörigkeitsgrad $\mu_A(x)$ in einem Fuzzy Set A selbst, darf dort auch wieder ein Fuzzy Set sein. Fuzzy Sets deren Zugehörigkeitsfunktion selbst wieder ein Fuzzy Set ist, nennt man nach Zadeh Ultrafuzzy Sets.

2.2 Modellierung unscharfer Mengen mittels Zugehörigkeitsfunktionen

Um die Abstufungen einer Zugehörigkeit (Zugehörigkeitsgrad) zu beschreiben benutzen wir Funktionsgraphen. Es sind Graphen mit Werten zwischen 0 und 1, die eine graduelle Zugehörigkeit repräsentieren. Dabei ist zu beachten, dass jeder Graph für eine subjektive Modellierung von linguistischem Wissen steht. Welche Zugehörigkeitsfunktion für ein spezielles Problem optimal ist, muss von Fall zu Fall entschieden werden. Die verwendeten Funktionen besitzen oft einen einfachen mathematischen Zugang, wie die folgenden Beispiele zeigen.

a) Modellierung einer Zugehörigkeitsfunktion mittels einer Dreiecksfunktion

$$\text{Beh.: } \mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < a_1, \\ \frac{x - a_1}{a_2 - a_1} & \text{für } a_1 \leq x \leq a_2, \\ \frac{a_3 - x}{a_3 - a_2} & \text{für } a_2 < x \leq a_3, \\ 0 & \text{für } x > a_3. \end{cases}$$

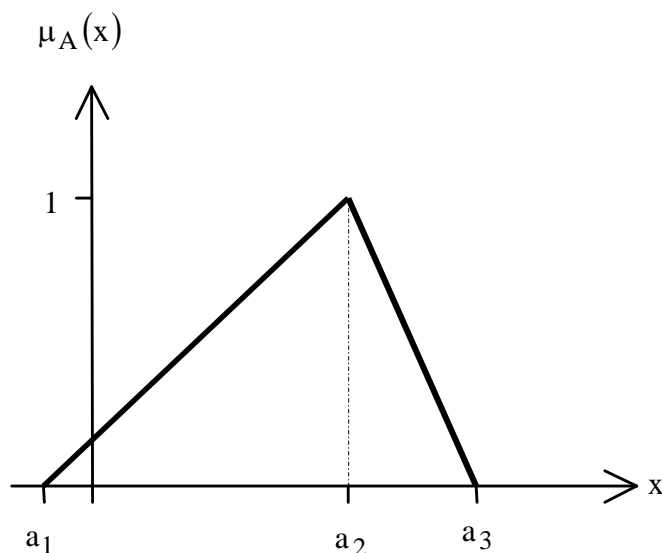


Fig.2.1: Oft werden symmetrische Zugehörigkeitsfunktionen verwendet. Falls x die Temperatur repräsentiert, kann die asymmetrische Dreiecksfunktion interpretiert werden als „lieber eine etwas zu niedrige Temperatur (bezüglich a_2) als eine

zu hohe Temperatur“. An der Stelle a_2 ist die Funktion zwar stetig aber nicht differenzierbar. Die Funktion ist festgelegt durch drei Parameter.

Bew.:

Funktionen mit bereichsweisen Geradenstücken, wie beispielsweise die obige Dreiecksfunktion, aber auch die linguistischen Terme bestehend aus Dreiecksfunktionen für die fuzzyfisierten Eingangsgrößen oder die aggregierte Fuzzy-Ausgabe haben einen einfachen mathematischen Zugang über die Zweipunkteform oder die Normalform einer Geraden.

Anwendung der Zweipunkteform

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

für eine Gerade.

Intervall $[a_1, a_2]$:

$$\frac{\mu(x) - 0}{x - a_1} = \frac{1 - 0}{a_2 - a_1} \Rightarrow$$

$$\mu(x) = \frac{x - a_1}{a_2 - a_1}$$

Intervall $[a_2, a_3]$:

$$\frac{\mu(x) - 1}{x - a_2} = \frac{0 - 1}{a_3 - a_2} \Rightarrow \mu(x) = \frac{a_2 - x}{a_3 - a_2} + 1$$

$$\mu(x) = \frac{a_3 - x}{a_3 - a_2}$$

Damit das Intervall überschneidungsfrei (disjunkt) bleibt, wird der Bereich auf $(a_2, a_3]$ eingeschränkt.

Folge für die Fuzzy-Menge A

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < a_1 \\ \frac{x - a_1}{a_2 - a_1} & \text{für } [a_1, a_2] \\ \frac{a_3 - x}{a_3 - a_2} & \text{für } (a_2, a_3] \\ 0 & \text{für } x > a_3 \end{cases}$$

b) Γ - Funktion als Zugehörigkeitsfunktion

$$\mu_A(x) = \begin{cases} = 0 & \text{für } x < a_1, \\ = \frac{(x - a_1)}{(a_2 - a_1)} & \text{für } a_1 \leq x \leq a_2, \\ = 1 & \text{für } x > a_2. \end{cases}$$

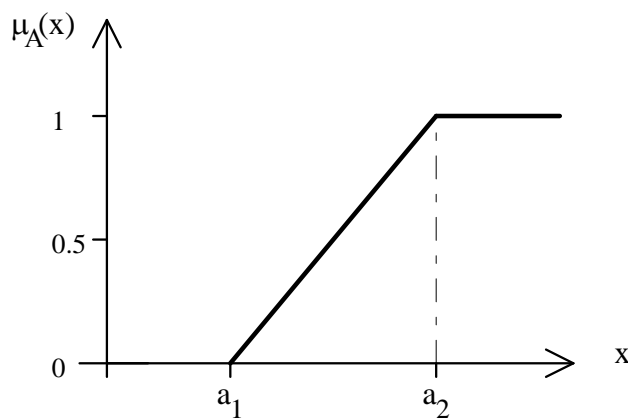


Fig.2.2: Repräsentiert eine Γ - Funktion mit zwei Parametern. Die Funktion ist an der Knickstelle stetig aber nicht glatt.
Geglättete Γ -Funktion:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < a, \\ \frac{k(x-a)^2}{1+k(x-a)^2} & \text{für } a \leq x < \infty. \end{cases}$$

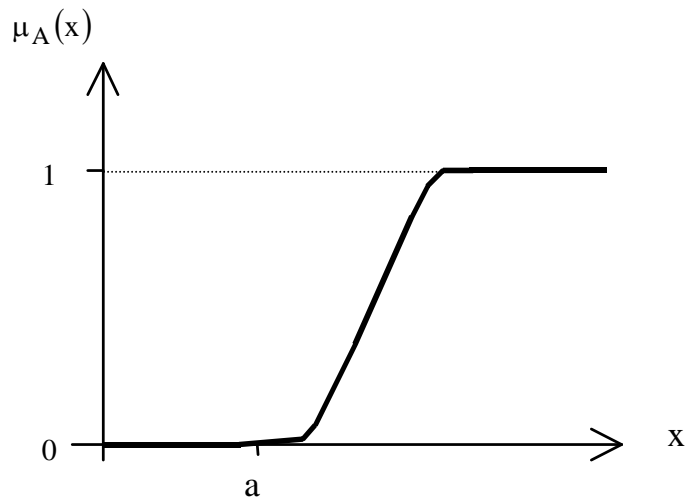


Fig.2.3: Geglättete Γ - Funktion: Stetige, d.h. an jeder Stelle differenzierbare Zugehörigkeitsfunktion mit den Parametern a und k .

Alternativ:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < a, \\ 1 - e^{-k(x-a)^2} & , a \leq x, k > 0. \end{cases}$$

Zadehs S-Funktion:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < a_1, \\ 2 \left(\frac{x - a_1}{a_3 - a_1} \right)^2 & \text{für } a_1 \leq x < a_2, \\ 1 - 2 \left(\frac{x - a_3}{a_3 - a_1} \right)^2 & \text{für } a_2 \leq x \leq a_3, \\ 1, \text{ mit } a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2} & \text{für } x > a_3. \end{cases}$$

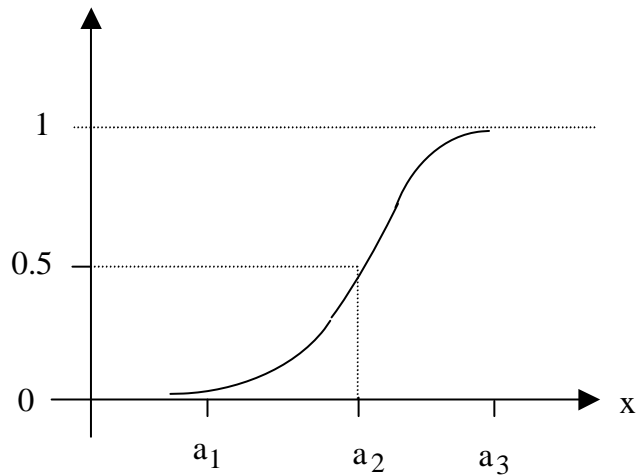


Fig. 2.4: Zadehs S-Funktion repräsentiert eine stetige Zugehörigkeitsfunktion mit zwei Parametern a_1 und a_2 .

Bem.: Für eine geschlossene Darstellung eignet sich auch die arctan-Funktion.

c) **L-Funktion**

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x < a_1, \\ \frac{a_2 - x}{a_2 - a_1} & \text{für } a_1 \leq x \leq a_2, \\ 0 & \text{für } x > a_2. \end{cases}$$

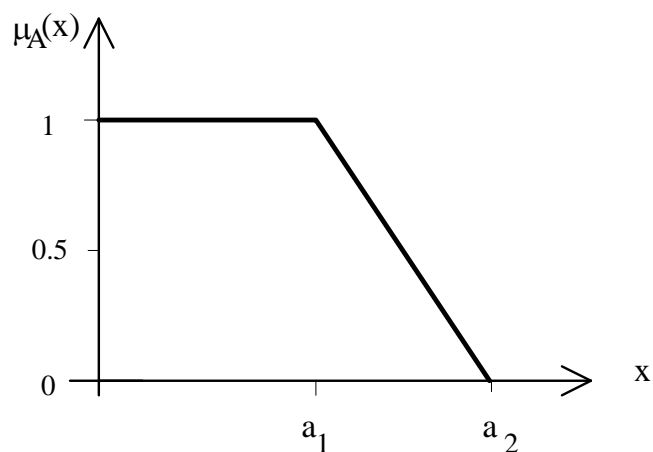


Fig. 2.5: Die L-Funktion ist die an der vertikalen Linie gespiegelte Γ -Funktion (auch als R-Funktion bezeichnet).

$$\mu_A(x) = \frac{1}{1+kx^2}, k > 1.$$

Stetige Version:

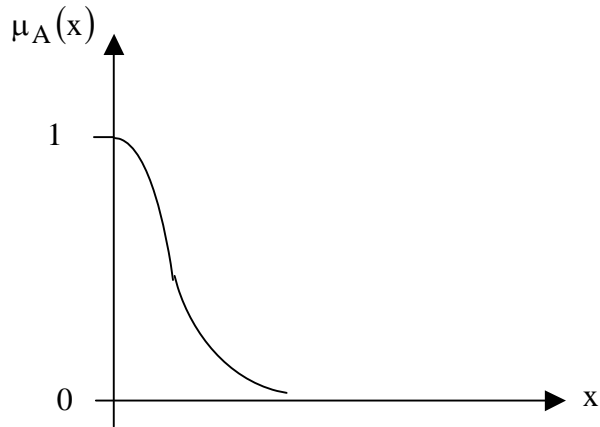


Fig. 2.6: Stetige Zugehörigkeitsfunktion.

Alternativ: Stetige Zugehörigkeitsfunktion vom Exponentialtyp

$$\mu_A(x) = e^{-kx^2}, k > 0.$$

d) Modellierung einer Trapezfunktion

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < a_1, \\ \frac{(x - a_1)}{(a_2 - a_1)} & \text{für } a_1 \leq x \leq a_2, \\ 1 & \text{für } a_2 < x < a_3, \\ \frac{(a_4 - x)}{(a_4 - a_3)} & \text{für } a_3 \leq x \leq a_4, \\ 0 & \text{für } x > a_4. \end{cases}$$

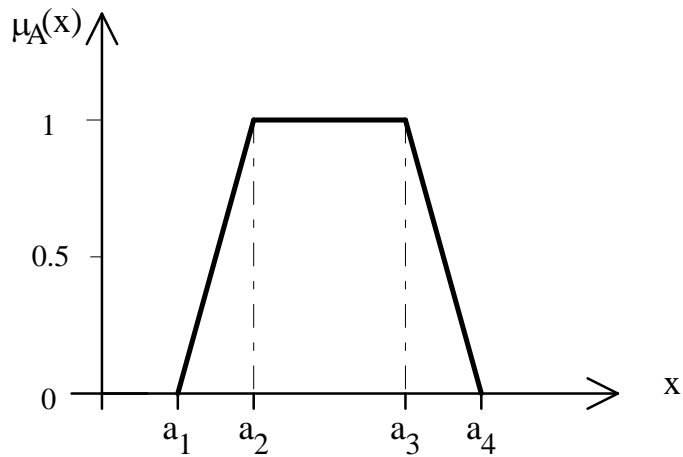


Fig.: 2.7: Für $a_2 = a_3 = a$ geht dieser Graph in denjenigen einer symmetrischen Dreiecksfunktion über.

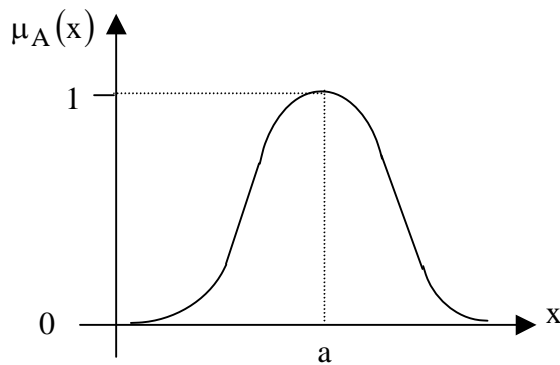


Fig.2.8: Stetige Zugehörigkeitsfunktion vom Exponentialtyp.

$$\mu_A(x) = e^{-k(x-a)^2}, k > 0 .$$

Alternativ:

$$\mu_A(x) = \frac{1}{1+k(x-a)^2}, k > 1.$$

e) **Funktion mit Senke**

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x < a_1, \\ \frac{a_2 - x}{a_2 - a_1} & \text{für } a_1 \leq x \leq a_2, \\ 0 & \text{für } a_2 < x < a_3, \\ \frac{x - a_3}{a_4 - a_3} & \text{für } a_3 \leq x \leq a_4, \\ 1 & \text{für } x > a_4. \end{cases}$$

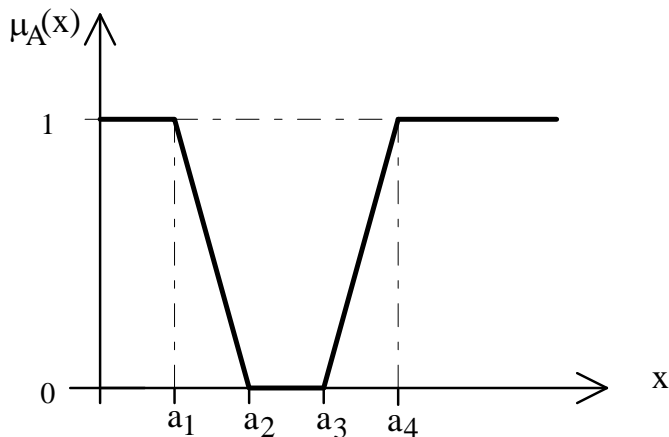


Fig.2.9: Zusammengesetzte Zugehörigkeitsfunktion

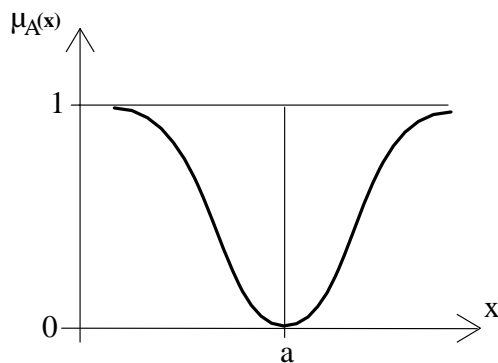


Fig.2.10: Geglättete Senkenfunktion vom Exponentialtyp

$$\mu_A(x) = 1 - e^{-k(x-a)^2}, k > 1.$$

Alternativ: Darstellung der Senkenfunktion mittels einer rationalen Funktion

$$\mu_A(x) = \frac{k(x-a)^2}{1+k(x-a)^2}, k > 0.$$

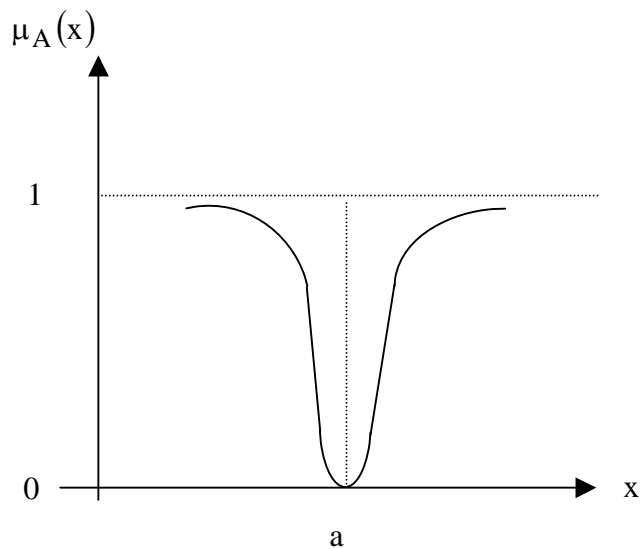


Fig. 2.11: Geglättete Senkenfunktion vom Typ rationale Funktion.

f) Modellierung mit einer verallgemeinerten Trapezfunktion

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < a_1, \\ \frac{b_2(x - a_1)}{a_2 - a_1} & \text{für } a_1 \leq x \leq a_2, \\ \frac{(b_3 - b_2)(x - a_2)}{a_3 - a_2} + b_2 & \text{für } a_2 < x \leq a_3, \\ 1 \text{ oder } b_3 = b_4 & \text{für } a_3 < x < a_4, \\ \frac{(b_4 - b_5)(a_5 - x)}{a_5 - a_4} + b_5 & \text{für } a_4 \leq x \leq a_5, \\ \frac{b_5(a_6 - x)}{a_6 - a_5} & \text{für } a_5 < x \leq a_6, \\ 0 & \text{für } a_6 < x. \end{cases}$$

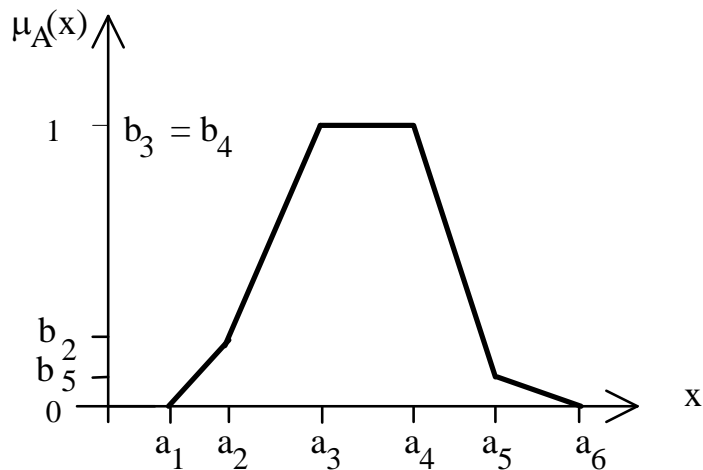


Fig.2.12: Trapezfunktion mit bereichsweise stetigen Funktionsteilen

g) Zugehörigkeitsfunktionen $F(x)$ mit modellierbaren Flanken

$$\mu_A(x) = \begin{cases} F_1(x^*) \text{ mit } x^* = \frac{a_1 - x}{\alpha} \text{ für } x < a_1, \\ 1 \text{ für } a_1 \leq x \leq a_2, \\ F_2(x^*) \text{ mit } x^* = \frac{x - a_2}{\beta} \text{ für } x > a_2, \end{cases}$$

mit beispielsweise $F_1(x) = e^{-x}$ und $F_2(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

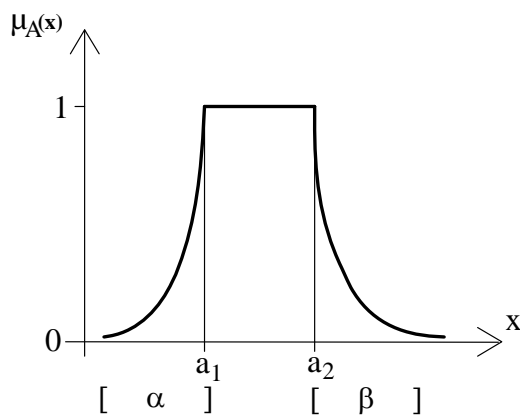


Fig.2.13: Graph mit modellierbaren Flanken.

Bemerkung:

- (1) Mit wenigen Parametern und gewissen Einschränkungen lassen sich ganz unterschiedliche Zugehörigkeitsfunktionen charakterisieren.
- (2) Die Zugehörigkeitsfunktionen (Fig. 2.1, 2.2, 2.5, 2.7, 2.9, 2.12, 2.13) sind an den Knickstellen stetig aber nicht differenzierbar, nicht so die geglätteten Funktionen.
- (3) Vorsicht: Die geglätteten Funktionen gehen im Limes $x \rightarrow \pm\infty$ in die Funktionswerte $\mu_A(x)=1$ oder 0 über. Um einen definierten Wertebereich für $\mu_A(x)$ zu erhalten wird die x-Achse parallel zu sich in Richtung $\mu_A(x) > 0$ verschoben oder/und $\mu_A(x) < 1$ gewählt.
- (4) Betrachten wir die Figur 2.8 genauer, dann repräsentiert diese Darstellung ein unscharfes Intervall. Von einem scharfen Kern aus existiert eine Verminderung der Zugehörigkeitsfunktionen asymptotisch auf den Wert Null. Werden scharfen Gebieten eine unscharfe Randzone zugeordnet, so kann man unscharfe Gebiete im \mathbb{R}^n definieren (/Ba1/, /Go/).
- (5) Vorstehende Zugehörigkeitsfunktionen wurden unter der Voraussetzung disjunkter Wertebereich formuliert. Oft wird die Eigenschaft disjunkter Definitionsbereiche nicht berücksichtigt. Als Ergebnis erhalten wir elegantere Formulierungen (/Bö/).
- (6) Eine elegante Formulierung ergibt sich durch die Verwendung von Spline-Funktionen als Zugehörigkeitsfunktionen (siehe (h)) oder mittels sogenannter differenzierbarer Zugehörigkeitsfunktionen (siehe (i)).

h) Modellierung mittels B-Splines

B-Spline-Funktionen haben eine interessante Charakteristik, sie sind definiert mittels einem sogenannten Knotenvektor $\underline{\lambda}$, bestehend aus $(k+1)$ -Elementen, wobei die Größe k die Ordnung der B-Splines definiert. Jedes Element des Knotenvektors definiert einen Knoten. Die Werte der B-Splines können mittels einer Rekursionsformel [/C/, /dB/] berechnet werden:

$$B_j^{k+1}(x) = \frac{x - \lambda_j}{\lambda_{j+k-1} - \lambda_j} B_j^k(x) + \frac{\lambda_{j+k} - x}{\lambda_{j+k} - \lambda_{j+1}} B_{j+1}^k(x) \quad \text{mit}$$

$$B_j^1(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } x \in [\lambda_j, \lambda_{j+1}) \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Verwendete Abkürzungen:

x : Anfangswert (input value)

$B_j^k(x)$: Aktivierungswert der j -ten B-Splines-Funktion, definiert über dem Knoten λ_j bezüglich $j+k$.

Eigenschaften der B-Splines:

(i) Positivity: $B_j^{k+1}(x) \geq 0 \quad \forall \quad x \text{ im Def.-Bereich.}$

(ii) Local Support: $B_j^{k+1}(x) \neq 0$, falls $x \in [\lambda_j, \lambda_{j+k}]$.

(iii) Partition of Unity: $\sum_{j=0}^n B_j^{k+1}(x) = 1$.

(iv) Derivative of a B-spline: exist.

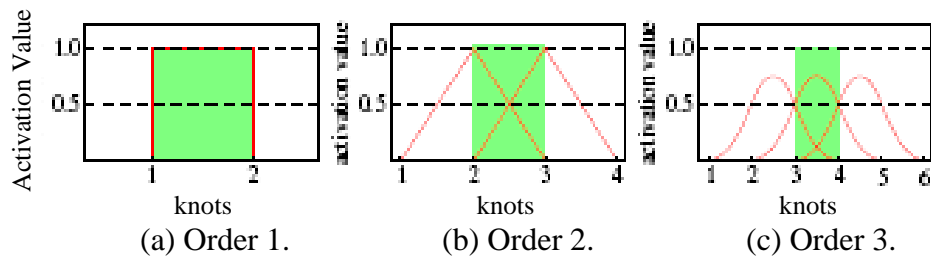


Fig. 2.14: Univariate B-Spline-Funktionen von verschiedener Ordnung. Der grüne Bereich kennzeichnet den Bereich wo die Partition of Unity (Summe der B-Spline-Werte gleich 1) gültig ist (/Re/).

Im Anwendungsbereich (beispielsweise Sugeno-Fuzzy-Modell) werden bei Anwendung des Produkt-Operators auch Bivariate B-Splines benötigt, die aus Univariate B-Splines geformt werden können (/Re/):

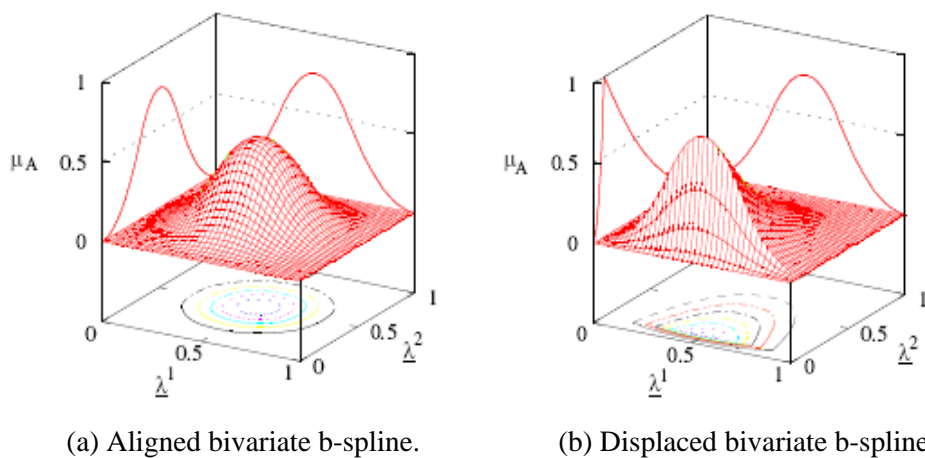


Fig. 2.15: Produktdarstellung Univariate B-splines.

a) Zentrierte Konstruktion einer Bivariate B-Spline-Funktion aus zwei Univariate B-Splines der Ordnung 3 mit den Knotenvektoren $\underline{\lambda}^1 = \underline{\lambda}^2 = (0, 0.\bar{3}, 0.\bar{6}, 1)$.

b) Verschobene Konstruktion einer Bivariate B-Spline-Funktion aus Univariate B-Splines der Ordnung 3 mit den Knotenvektoren $\underline{\lambda}^1 = (0, 0.\bar{3}, 0.\bar{6}, 1)$ und $\underline{\lambda}^2 = (0, 0.1, 0.1001, 1)$.

i) Modellierung mittels differenzierbarer Zugehörigkeitsfunktionen

Die Übertragungsfunktion eines Fuzzy-Controllers ist durch die Wahl geeigneter Zugehörigkeitsfunktionen für die Fuzzyfizierung, Inferenzoperatoren zur Anwendung der Regeln in der Wissensbasis und schließlich Defuzzyfizierungsoperatoren bestimmt. Bei vielen Anwendungen des Fuzzy Control ist es von großem Interesse, Übertragungsfunktionen mit günstigen Eigenschaften hinsichtlich der Differenzierbarkeit zu haben.

Def.: Eine Zugehörigkeitsfunktion, die günstige Eigenschaften hinsichtlich der Differenzierbarkeit hat, wird hier glatte Zugehörigkeitsfunktion genannt.

Dafür ist es vor allem wünschenswert, stetig differenzierbare Zugehörigkeitsfunktionen mit nur wenigen Parametern zu besitzen.

Einerseits existieren Operatoren für Aggregation, Implikation und Komposition, die die Eingänge stetig differenzierbar auf die Ausgänge abbilden. Die meisten Operatoren, die keine Minimum- oder Maximumoperatoren verwenden, haben diese Eigenschaft. Von den t- und s-Normen aus [GRA99/ S. 358] beispielsweise sind dies das algebraische Produkt und die algebraische Summe sowie die Operatoren von EINSTEIN, HAMACHER, FRANK und DOMBI. Andererseits existieren auch Defuzzyfizierungsmethoden, die stetig differenzierbar sind: Für den SUGENO-Controller [SUG85/] ist dies etwa die gewichtete Summe.

Der bleibende Schwachpunkt zur Bestimmung der Differenzierbarkeit der Übertragungsfunktion ist daher die Zugehörigkeitsfunktion. Häufig werden Zugehörigkeitsfunktionen stückweise aus linearen Funktionen zusammengesetzt (siehe oben); daher sind sie am Ende jedes Geradenabschnitts nicht differenzierbar. Ein Weg, dieses zu vermeiden, ist die Verwendung der Gaußschen Fehlerfunktion. Diese Funktion ist jedoch stets symmetrisch und inflexibel, d.h., aus ihr kann nur schwer eine gewünschte Dreiecks- oder Trapezfunktion zusammengesetzt werden. Zudem ist sie immer ungleich null, daher wird sie oft nach unten verschoben und horizontal abgeschnitten, oder zwei

Intervallgrenzen werden eingeführt, an denen die Funktion vertikal abgeschnitten wird. In beiden Fällen entstehen zwei Unstetigkeitsstellen der Ableitung, die eine analytische Betrachtung verhindern. Auch bei der Wahl von sinusförmigen Zugehörigkeitsfunktionen liegt eine symmetrische Form mit zwei Unstetigkeitsstellen der Ableitung vor.

In diesem Abschnitt wird eine Klasse symmetrischer und asymmetrischer exponentieller Zugehörigkeitsfunktionen sowie eine Klasse daraus abgeleitet, flexiblerer Zugehörigkeitsfunktionen vorgestellt [/GL99/]. Eine glatte Funktion kann beispielsweise zweimal stetig differenziert sein – durch die Anwendung geeigneter Operatoren hat die Übertragungsfunktion dieselben Eigenschaften. Von dieser Übertragungsfunktion können dann partielle Ableitungen gebildet werden, mit deren Hilfe das Ein-/Ausgabeverhalten untersucht werden kann. Eine solche glatte Übertragungsfunktion ist somit die Voraussetzung zur Untersuchung des Stabilitätsverhaltens eines Fuzzy-Controllers.

i.1) Einfache glatte Zugehörigkeitsfunktionen

Ein interessanter Repräsentant glatter Zugehörigkeitsfunktionen ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq a \\ \exp(-1/p(x)) & \text{für } a < x < b \\ 0 & \text{für } x \geq b \end{cases} \quad (1)$$

mit einem Polynom p mit Nullstellen in a und b sowie $p(x) > 0$ in $(a; b)$.

Dann ist $f(x)$ beliebig stetig differenzierbar in $(-\infty; a)$, $(a; b)$ und $(b; \infty)$. In $(a; b)$ ist die n -te Ableitung $f^{(n)}$ das Produkt

eines Polynoms und $\frac{\exp(-1/p(x))}{p(x)^{2n}}$, dies ist eine stetige Funk-

tion in $(a; b)$, und außerhalb des Intervalls $[a; b]$ beträgt $f^{(n)}(x) = 0$. Um die Stetigkeit von $f^{(n)}$ auf \mathbb{R} zu beweisen,

muss gezeigt werden, dass $f^{(n)} \rightarrow 0$ für $x \rightarrow a (x > a)$ und $x \rightarrow b (x < b)$ gilt.

Der erste Faktor von $f^{(n)}$ ist ein Polynom, also ist er beschränkt für $x \rightarrow a$ und $x \rightarrow b$. Der Nenner des zweiten Faktors konvergiert gegen null, aber der Zähler mit der Exponentialfunktion konvergiert wesentlich schneller gegen null als $1/p(x)^{2n}$ divergiert, was mithilfe der Regel von L'HOSPITAL

gezeigt werden kann. Mithin konvergiert dieser Faktor und das ganze Produkt gegen null, was zu zeigen war.

Daher ist f beliebig oft stetig differenzierbar und null außerhalb eines gegebenen Intervalls $[a; b]$. Durch die Wahl $p(x) = (x - a)(b - x)$ kann eine Fuzzy-Menge an einer beliebigen Stelle definiert werden. Für $[a; b] = [0; 1]$ ist die normierte Funktion f mit einer gestrichelten Linie in der folgenden Grafik dargestellt (Fig. 2.16). Diese Funktion nimmt ihr Maximum für $x_m = (a + b)/2$ an, ist streng monoton steigend in $[a; x_m]$ und streng monoton fallend in $[x_m; b]$. Die Funktion f wurde normiert durch Multiplikation mit $f^{-1}(x_m) = \exp(4/(b - a)^2)$.

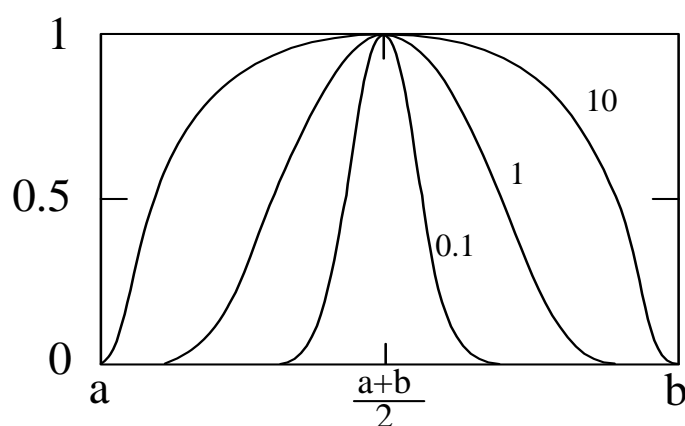


Fig. 2.16: $f(x)$ modifiziert durch Multiplikation von $p(x)$ mit den Konstanten 10, 1 und 0.1. Die Funktion $f(x)$ besitzt (siehe $p(x)$) nur die Parameter a und b . Wahl in Abbildung: $a = 0$ und $b = 1$.

Die Funktion f erfüllt zwei der drei geforderten Eigenschaften: Sie ist glatt und null außerhalb eines gegebenen Intervalls. Die verbleibende Eigenschaft ist die einfache Modifizierbarkeit. Mögliche Modifikationen sind die Multiplikation des Polynoms p mit einer positiven Konstanten oder die Wahl von Polynomen höherer Ordnung. Durch die Multiplikation von p mit einer Konstanten größer als eins wird die Form breiter, die Multiplikation mit einer Konstanten kleiner als eins macht die Form schmaler, wie in obiger Grafik dargestellt (Fig. 2.16). Die Multiplikation erhält die Symmetrie und verändert die Position des Maximums nicht.

Wenn p zu einem asymmetrischen Polynom verändert wird, so wird auch f asymmetrisch, und die Position des Maximums wird verschoben. Um $p(x) > 0$ in $[a; b]$ zu gewährleisten, muss p mit positiv glatten Funktionen ohne Nullstellen in $[a; b]$

multipliziert werden, z. B. mit $(c-x)$ mit $c > b$ oder mit $(x+c)$ mit $c > -a$. Ein Beispiel für $[a;b] = [0;1]$ ist in folgender Grafik dargestellt (Fig. 2.17), wo $p(x) = x(1-x)$ mit $(2-x)$ multipliziert wurde, was das Maximum nach links verschiebt, und mit $(x+1)$, was das Maximum nach rechts verschiebt.

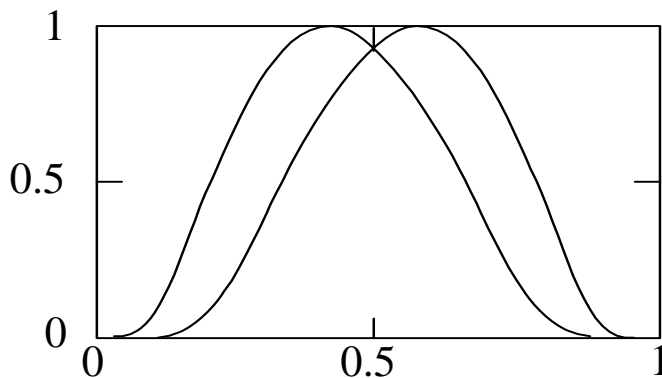


Fig. 2.17: $f(x)$ für die Polynome $p(x) = x(1-x)(2-x)$ und $p(x) = x(1-x)(x+1)$, mit spezieller Wahl für die Parameter a und b .

Dies sind zwei einfache Möglichkeiten, die Funktion f zu verändern – allerdings kann weder lediglich eine Seite der Funktion verändert noch ihre Form so angepasst werden, dass die häufig verwendeten, stückweise linearen Zugehörigkeitsfunktionen approximiert werden können.

i.2) Zusammengesetzte glatte Zugehörigkeitsfunktion

Flexiblere Zugehörigkeitsfunktionen resultieren aus einer Klasse von zusammengesetzten Funktionen – basierend auf dem mathematischen Prinzip, dass jede stetige Funktion durch eine Summe von Stufenfunktionen approximiert werden kann. In diesem Abschnitt wird eine Klasse von Zugehörigkeitsfunktionen vorgestellt, die wie Stufenfunktionen zusammengesetzt werden können. Wie sich zeigen lässt, können diese Funktionen Geraden sehr gut approximieren. Damit können die bisherigen Fuzzy-Regeln mit den üblichen dreiecks- und trapezförmigen Fuzzy-Mengen verwendet werden, und gleichwohl kann der Fuzzy Controller durch eine glatte analytische Übertragungsfunktion beschrieben werden.

Diese Klasse von Funktionen ist definiert durch

$$F_t(x) = \frac{\int_a^x f(t(u))du}{\int_a^b f(t(u))du} \quad (2)$$

mit der normierten Funktion f aus Gl. (1), dem Polynom $p(x) = (x-a)(b-x)$ und einer glatten Transformation t in $[a;b]$. Wird die Identitätsfunktion $t(x) = \text{id}(x) = x$ als Transformation t gewählt, so ergibt sich die Funktion F_{id} , die mit einer fetten Linie in der folgenden Grafik dargestellt ist (Fig. 2.18).

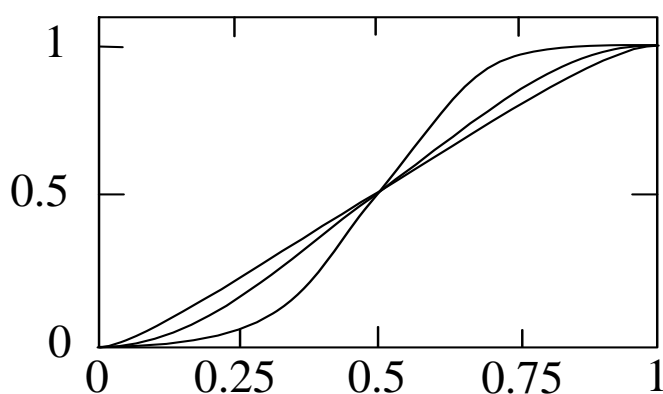


Fig. 2.18: Die Funktionen F_{q0}, F_{q1}, F_{q2} und F_{q3} konvergieren zu einer Geraden.

Wenn t eine glatte Transformation in $[a;b]$ ist d.h., wenn t beliebig oft stetig differenzierbar in $[a;b]$ ist, dann ist F_t glatt, da f und t glatt sind und die Gleichung

$$F_t'(x) = G_t f(t(x)) \quad (3)$$

gilt, wobei

$$G_t = 1 / \int_a^b f(t(u))du \quad (4)$$

eine Konstante ist.

Die Transformation t bietet hervorragende Möglichkeiten, die Form der Zugehörigkeitsfunktion zu beeinflussen. t muss streng monoton steigend oder fallend und glatt in $[a;b]$ sein, daher sind Polynome dafür geeignet. Im Folgenden sei $[a;b] = [0;1]$, $t(x) = x$ für $x \in \{0; \frac{1}{2}; 1\}$ (also muss t streng monoton steigend in $[0;1]$ sein) und $t(-x + \frac{1}{2}) - \frac{1}{2} = -t(x + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}$,

d.h., t soll punktsymmetrisch bzgl. $(0,5;0,5)$ sein. Das kleinste Polynom, das diese Bedingungen erfüllt, ist die einfache Identitätsfunktion $t(x) = \text{id}(x) = x$; das nächstgrößere Polynom ist $t(x) = cx^3 - \frac{3}{2}cx^2 + \left(1 + \frac{1}{2}c\right)x$ mit einer Konstanten $c \in [-2;4]$. Wird beispielsweise $c = 4$ für maximale Krümmung gewählt, so ergibt sich

$$q(x) := 4x^3 - 6x^2 + 3x. \quad (5)$$

Mit der rekursiven Definition $q_0 = \text{id}$, $q_1 = q \circ q_0, \dots$ und $q_{i+1} = q \circ q_i$ für $i \in \mathbb{N}$ ergibt sich eine Folge von glatten Funktionen. Durch die Identifikation $t(x) = q_0(x) = \text{id}(x) = x$ gilt mit Gl. 2

$$F_{q_0}(x) = F_{\text{id}}(x) = \frac{\int_0^x f(u) du}{\int_0^1 f(u) du}. \quad (6)$$

Im Falle $t(x) = q_1(x) = q(x) \circ q_0(x) = q(x)$ ergibt sich

$$F_{q_0}(x) = F_{\text{id}}(x) = \frac{\int_0^x f(4u^3 - 6u^2 + 3u) du}{\int_0^1 f(4u^3 - 6u^2 + 3u) du}. \quad (7)$$

Im nächsten Schritt wird $q_2 = q \circ q_1 = q \circ q$ verwendet, was äquivalent zu $q(q(x))$ ist, usw. Für diese Folge sind $F_{q_0}, F_{q_1}, F_{q_2}$ und F_{q_3} in obiger Grafik dargestellt (Fig. 2.18). Die Funktionenfolge F_{q_n} konvergiert zur Identitätsfunktion für $n \rightarrow \infty$ und $x \in (0;1)$.

Um dies zu zeigen, wird die zweite Ableitung von F_{q_n} berechnet:

$$F_{q_n}''(x) = G_{q_n} f'(q_n(x)) q_n'(x). \quad (8)$$

Da $G_{q_n} > 0$, ist diese Funktion genau dann null, wenn $f'(q_n(x)) = 0$ oder $q_n'(x) = 0$. Nun ist die Tatsache

$$q(x) = x \text{ für } x \in \left\{0; \frac{1}{2}; 1\right\} \quad (9)$$

wichtig. Damit ist

$$q_n(x) = x \text{ für } x \in \left\{0; \frac{1}{2}; 1\right\}. \quad (10)$$

$q'(x)$ ist genau dann null, wenn $x = \frac{1}{2}$, und wegen Gl. (9) und Gl. (10) ist

$q'_n(x) = q'(q_{n-1}(x))q'_{n-1}(x)$ genau dann null, wenn $x = \frac{1}{2}$ und $n \geq 1$. $f'(x)$ ist genau dann null. Wenn $x \in \left\{0; \frac{1}{2}; 1\right\}$, und wiederum wegen Gl. (10) ist $f'(q_n(x))$ genau dann null, wenn $x \in \left\{0; \frac{1}{2}, 1\right\}$.

Mithin existieren genau drei Nullstellen von F''_{q_n} , nämlich $0, \frac{1}{2}$ und 1 . Wegen Gl. (3) und (1) gilt $F'_{q_n}(x) \geq 0$ in $[0;1]$, und unter Verwendung von Gl. (10) folgt daraus $F'_{q_n}(0) = F'_{q_n}(1) = 0$. Deshalb ist F'_{q_n} streng monoton steigend in $\left[0; \frac{1}{2}\right]$, nimmt an $x = \frac{1}{2}$ ihr Maximum $F'_{q_n}\left(\frac{1}{2}\right) = G_{q_n} f\left(q_n\left(\frac{1}{2}\right)\right) = G_{q_n} f\left(\frac{1}{2}\right) = G_{q_n} e^{-4}$ an und ist streng monoton fallend in $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$. Weiterhin ist

$$F'_{q_n}(x) \rightarrow 1 \text{ für } n \rightarrow \infty,$$

was in GL99 (Grauel, Ludwig: Construction of differentiable membership functions) gezeigt wird. Entsprechende Darstellungen für trapez- und stufenförmige Zugehörigkeitsfunktionen lassen sich ebenfalls konstruieren (/GL99/).

Mit der dargestellten Konstruktionsmethodik konnte eine Klasse von glatten Zugehörigkeitsfunktionen erzeugt werden, die dreimal stetig differenzierbar sind. Diese Klasse enthält symmetrische und asymmetrische exponentielle Funktionen, die es erlauben, einen Fuzzy-Controller durch eine analytische Übertragungsfunktion zu beschreiben. Diese Funktionen sind den praktisch verwendeten Zugehörigkeitsfunktionen sehr ähnlich. Die dargelegte Methode ermöglicht daher die Untersuchung von Fuzzy-Controllern mit bekannten mathematischen Werkzeugen.

Fuzzy-Controller können sowohl lineare als auch nichtlineare Abbildungen realisieren, die durch die Definition der Fuzzy-Mengen, -Regeln und Inferenzmethoden bestimmt werden. Von den Fuzzy-Controllern kann besonders der SUGENO-Controller [/SUG85/] als Interpolationssystem eingesetzt werden [/UYMN93/, /KOC94/, /JOU92/, /WAN92/]. Wie GRAUEL und MACKENBERG gezeigt haben, hat eine zweidimensionale Interpolation mit komplementären sinusförmigen Zugehörigkeitsfunktionen unter Verwendung des Produkt- oder Minimumoperators gute Interpolationseigenschaften [/GM97/].

Ähnliche Ergebnisse können bei der Verwendung der vorgestellten exponentiellen glatten Zugehörigkeitsfunktionen erwartet werden.

2.2 Grundbegriffe unscharfer mathematischer Objekte

2.3.1 Unscharfer Punkt

Für die Existenz von zwei oder mehr Eingangsgrößen ist der Begriff des unscharfen Punktes im \mathbb{R}^n von Bedeutung. Es sei $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ der Kern von dem die Zugehörigkeitsfunktion nach beiden Seiten z.B. monoton abnimmt (Fig. 2.19).

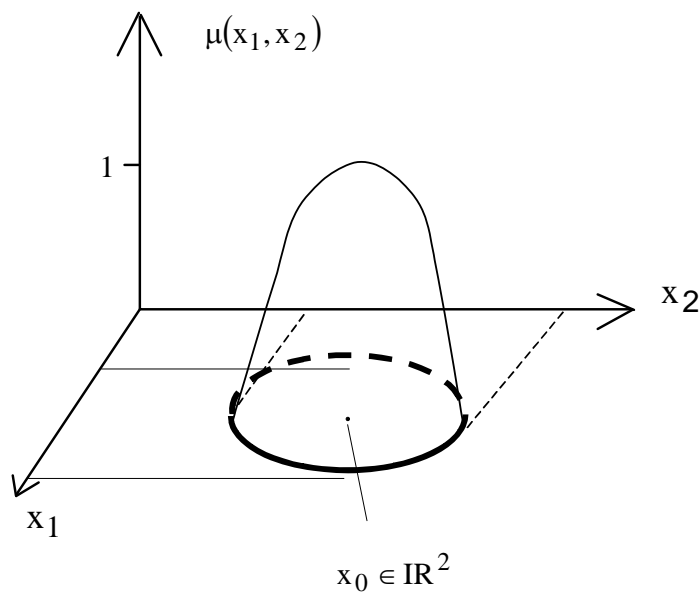


Fig. 2.19: Funktionale Abhängigkeit der Zugehörigkeitsfunktion für einen unscharfen Punkt \underline{x}_0 im \mathbb{R}^2 .

Diese qualitative Beschreibung sei durch die Funktion f gegeben. Die Abweichung vom Kern lassen sich durch ein Abstandsmaß $d(\underline{x}, \underline{x}_0)$ beschreiben, durch das der Wert der Funktion f , d.h. der Grad der Zugehörigkeit mittels

$$\mu(x_1, x_2) = f(d(\underline{x}, \underline{x}_0), a), a \in \mathbb{R}$$

beschrieben werden kann.

Wählt man das elliptische Hyperparaboloid, so ist die funktionale Abhängigkeit wie folgt festgelegt:

$$\mu(\underline{x}, \underline{B}) = \max \left\{ 1, 1 - (\underline{x} - \underline{x}_0)^T \underline{B} (\underline{x} - \underline{x}_0) \right\}$$

$\underline{\underline{B}}$ charakterisiert eine positive definierte m-reihige Matrix über dem Hyperellipsoid

$$E := \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R} \mid (\underline{x} - \underline{x}_0)^T \underline{\underline{B}} (\underline{x} - \underline{x}_0) < 1 \right\}.$$

Unscharfe Punkte können auch durch die folgenden funktionalen Beschreibungen dargestellt werden:

- symmetrische bzw. asymmetrische Pyramidenfunktion mit dreiecksförmigem Querschnitt und quadratischer oder rechteckiger Grundfläche,
- glockenförmige Zugehörigkeitsfunktionen,
- kegelförmige Pyramidenfunktion, etc.

2.3.2 Unscharfe Relationen: Modellierung fuzzy-wertiger Relationen

Für die Praxis spielen unscharfe bzw. fuzzy-wertige Relationen eine große Rolle, beispielsweise wenn

- „ungefähr gleich“
- „im wesentlichen kleiner“
- „im wesentlichen größer“, etc. beschrieben werden soll.

Üblich: Erklärung als Relationen zwischen Zahlen in der Ebene \mathbb{R}^2

Modellierung Gleichheit „=“ lässt sich als Menge erklären

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y \right\} \Leftrightarrow \text{durch eine Gerade } y = x \text{ in der Ebene}$$

Modellierung der Relation R_0 „ungefähr gleich“ \Leftrightarrow linguistische Aussage

... kann angrenzend an ein scharfes Gebiet (hier gekennzeichnet durch eine Gerade) eine unscharfe Übergangszone zugelassen werden und verlangt werden, dass die Zugehörigkeitsfunktion in einer gewünschten Art (linear oder quadratisch) mit abnehmender Zugehörigkeit gegen Null geht.

Modellierung lineare Abnahme durch:

$$\mu_{R_0}(x, y) = \max \{0, 1 - a |x - y|\}$$

lineares Abklingen mit Faktor a .

Modellierung: linguistische Aussage „im wesentlichen kleiner als“ durch Relation R_1

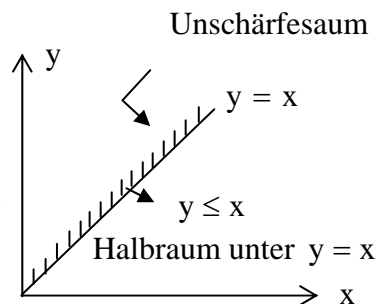
Für diese Relation R_1 „im wesentlichen kleiner als“ wird man von der scharfen Relation „ \leq “ ausgehen, zu der die Wertemenge

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq y\}$$

gehört.

Interpretation: scharfe Relation

$$\Downarrow \\ y \leq x$$



y im wesentlichen kleiner als x

Das „im wesentlichen kleiner“ soll hier bedeuten, dass geringe Überschreitungen im gewissen Sinne toleriert werden. Deshalb: Halbebene wird nach oben mit einem „Unschärfesaum“ versehen.

Modellierung: linguistische Aussage „im wesentlichen größer als“ durch Relation R_2

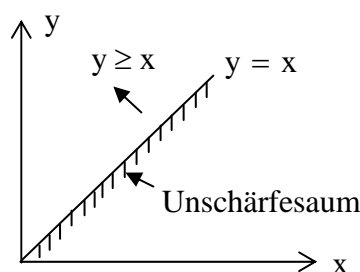
Für die Relation R_2 „im wesentlichen größer als“ wird man von der scharfen Relation „ \geq “ ausgehen, zu der die Wertemenge

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\}$$

gehört.

Interpretation: scharfe Relation

$$\Downarrow \\ y \geq x$$



y im wesentlichen größer als x

„Im wesentlichen größer“ soll hier bedeuten, dass geringe Überschreitungen im gewissen Sinne toleriert werden. Deshalb: Halbebene wird nach unten mit einem „Unschärfesaum“ versehen.

$$\mu_{R_2}(x, y) = \begin{cases} \max\{0, 1 - a|x - y|\} & \text{für } y < x \text{ mit } a \in \mathbb{R}^+ \\ 1 & \text{für } y \geq x. \end{cases}$$

Setzt man für eine Variable einen festen Wert ein, z.B. $y = y_0$, dann folgt aus dieser modellmäßigen Beschreibung:

R_2 kann als unscharfe Schranke bezüglich der anderen Variablen interpretiert werden.

Bemerkung: Unscharfe Schranken besitzen im Bereich der unscharfen Optimierung, der qualitativen Datenanalyse und der Muster-Klassifikation praktische Bedeutung.

2.3.3 Unscharfe Funktionen

Betrachtet man den Graph $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ einer scharfen Funktion als Kern einer unscharfen Menge A , bei der z.B. die Zugehörigkeitswerte mit wachsendem Abstand vom Kern monoton abnehmen, dann ist durch A eine unscharfe Funktion definiert.

a) Explizite Funktion

Betrachtet man A als eine Schar von unscharfen Zahlen $Y(x)$ und x als Scharparameter sowie als Kern $\{f(x)\}$, so erhalten wir eine Zugehörigkeitsfunktion

$$\mu_{Y(x)}(y) = \mu_A(x, y).$$

Die Zugehörigkeitsfunktion $\mu(x, y)$ aus Gl.(2.27) repräsentiert eine unscharfe Funktion, ihr Kern ist durch Gl.(2.26) gegeben.

b) Implizite Funktion

Eine implizite Funktion f

$$\left\{ f(x, y) = 0 \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

repräsentiert im Graph, der als Kern einer unscharfen impliziten Funktion betrachtet werden kann. **Beispiel** hierzu sei ein Kreis

$$K = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - r^2 = 0 \right\}.$$

Modellierung eines unscharfen Randgebietes kann mit

$$\mu_K = \exp\left\{ -a \cdot \left| x^2 + y^2 - r^2 \right| \right\}, \quad a > 0,$$

erfolgen.

2.4 Mengenalgebraische Operationen

2.4.1 Elementare Operationen

Es seien A, B, C , etc. unscharfe Mengen, für die mengenalgebraische Operationen definiert werden können (/Za1/). Die folgenden Verknüpfungen für unscharfe Mengen können als Verallgemeinerungen der entsprechenden Operationen für gewöhnliche Mengen verstanden werden.

Operationen mit unscharfen Mengen werden in den Anwendungen benötigt, um z.B. zwei unscharfe Mengen, einer linguistischen Beschreibung von physikalischen Größen, in einer Wenn- Dann- Regel miteinander zu verknüpfen.

Im folgenden seien zunächst die elementare mengenalgebraische Operation mit ihren zugehörigen Graphen dargestellt.

Def. Union: Die Vereinigung $A \cup B$ ("union") zweier fuzzy sets A und B definiert durch die Maximumoperation $\max(\cdot, \cdot)$ bezüglich ihrer Zugehörigkeitsfunktionen $\mu_A(x)$ und $\mu_B(x)$:

$$C := A \cup B \text{ und } \mu_C(x) := \max(\mu_A(x), \mu_B(x)), \forall x \in X,$$

$$\text{wobei } \max(a, b) = \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq b \\ b, & \text{falls } a < b \end{cases}.$$

Die Vereinigung als logische ODER-Verknüpfung kann durch verschiedene Repräsentationsformen interpretiert werden.

a) ODER-Operation zweier Zugehörigkeitsfunktionen

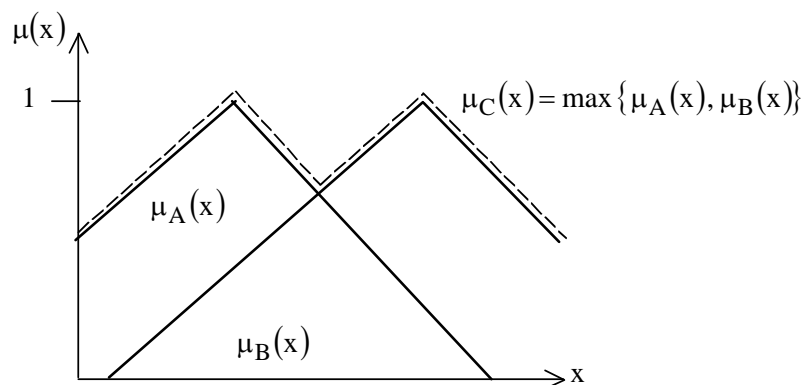


Fig. 2.20: Interpretation: Der Vereinigung entspricht einer logischen ODER-Verknüpfung. $\mu_C(x)$ definiert den maximalen Wert der jeweiligen Zugehörigkeitsfunktion $\mu_A(x)$ oder $\mu_B(x)$.

Mit Hilfe der beschränkten, algebraischen und drastischen Summe lassen sich weitere Verknüpfungen als Ergänzung zur Vereinigungsbildung für alle $x \in X$ wie folgt definieren:

Beschränkte Summe:

$$C := A \oplus B \text{ und } \mu_C := \min\{1, \mu_A(x) + \mu_B(x)\}$$

algebraische Summe:

$$C := A + B \text{ und } \mu_C := \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$$

drastische Summe:

$$C := A \diamond B \text{ und } \mu_C := \begin{cases} \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, & \text{wenn } \mu_A(x) = 0 \\ & \text{oder } \mu_B(x) = 0 \\ 1 \text{ sonst.} \end{cases}$$

b) ODER-Operation zweier Zugehörigkeitsfunktionen: beschränkte Summe (bounded sum)

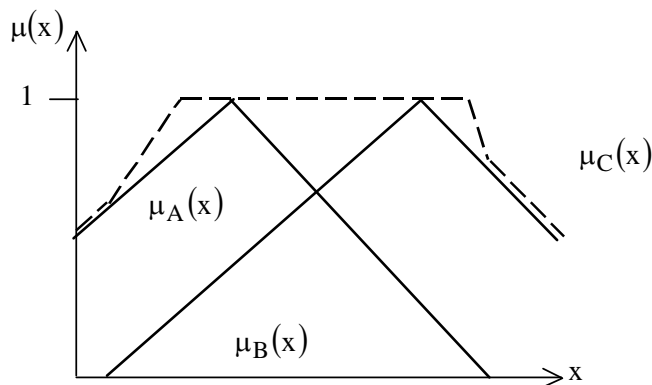


Fig. 2.21: $\mu_C(x)$ repräsentiert die Zugehörigkeitsfunktion von der beschränkten Summe: $\mu_C(x) = \min\{1, \mu_A(x) + \mu_B(x)\}$.

c) ODER-Operation zweier Zugehörigkeitsfunktionen: algebraische Summe

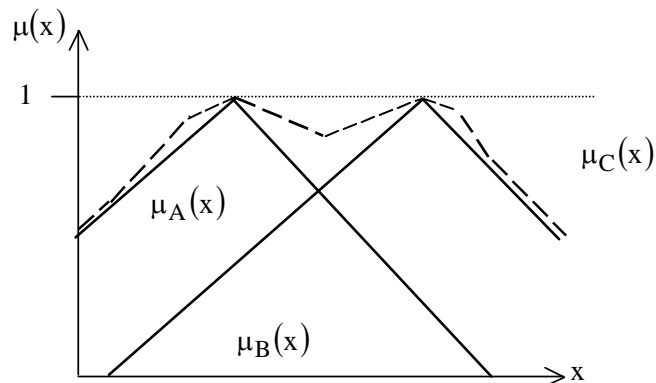


Fig. 2.22: Die Zugehörigkeitsfunktion $\mu_C(x)$ charakterisiert die algebraische Summe, sie ist definiert durch $\mu_C(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$.

d) ODER-Operation zweier Zugehörigkeitsfunktionen: drastische Summe

Zugehörigkeitsfunktion der drastischen Summe ist definiert durch

$$\mu_C(x) = \begin{cases} \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, & \text{wenn } \mu_A(x) = 0 \text{ oder } \mu_B(x) = 0 \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Def. Intersection: Die Schnittmenge $A \cap B$ ("intersection") zweier fuzzy sets A und B ist definiert durch die Minimumoperation $\min(\cdot, \cdot)$ bezüglich ihrer Zugehörigkeitsfunktion $\mu_A(x)$ und $\mu_B(x)$:

$$C := A \cap B \quad \text{und} \quad \mu_C(x) := \min(\mu_A(x), \mu_B(x)), \quad \forall x \in X,$$

$$\text{wobei } \min(a, b) = \begin{cases} a, & \text{falls } a \leq b \\ b, & \text{falls } a > b \end{cases}.$$

Anders ausgedrückt:

$$A \cap B = \int_x \min(\mu_A(x), \mu_B(x)) / x$$

Bem. Die Schnittmengenbildung entspricht der logischen Verknüpfung UND.

e) UND-Operation zweier Zugehörigkeitsfunktionen

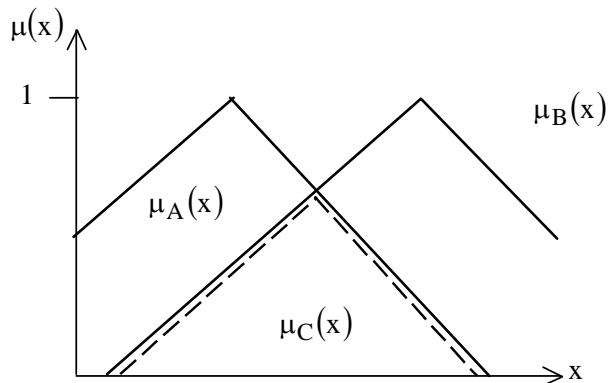


Fig.2.23: Interpretation: Die Schnittmengenbildung entspricht der logischen UND-Verknüpfung. Die Zugehörigkeitsfunktion $\mu_C(x)$ definiert den minimalen Wert von $\mu_A(x)$ oder $\mu_B(x)$.

Analog dem erweiterten Summenbegriff für die Vereinigungsbildung ergeben sich für die Durchschnittsbildung mit Hilfe des beschränkten, algebraischen und drastischen Produktes die entsprechenden Erweiterungen. Die Produkte sind für alle $x \in X$ wie folgt definiert:

beschränktes Produkt:

$$C := A \cdot B \text{ und } \mu_C(x) := \max\{0, \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1\},$$

algebraisches Produkt:

$$C := A \bullet B \text{ und } \mu_C(x) := \mu_A(x) \cdot \mu_B(x),$$

drastisches Produkt :

$C := A * B$ und

$$\mu_C(x) := \begin{cases} \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, & \text{wenn } \mu_A(x) = 1 \\ & \text{oder } \mu_B(x) = 1 \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

f) UND-Operation zweier Zugehörigkeitsfunktionen: beschränktes Produkt (bounded product)

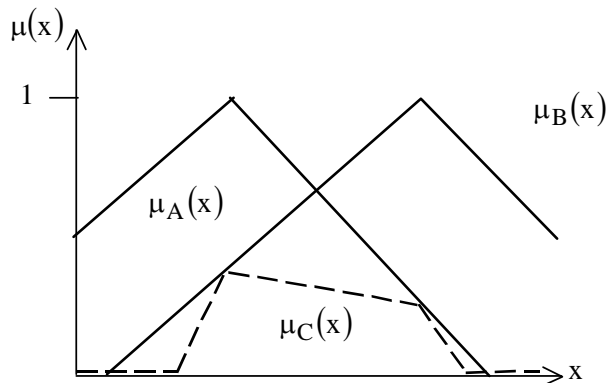


Fig.2.24: $\mu_C(x)$ repräsentiert die Zugehörigkeitsfunktion des beschränkten Produkts:

$$\mu_C(x) = \max\{0, \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1\} .$$

g) UND-Operation zweier Zugehörigkeitsfunktionen: algebraisches Produkt

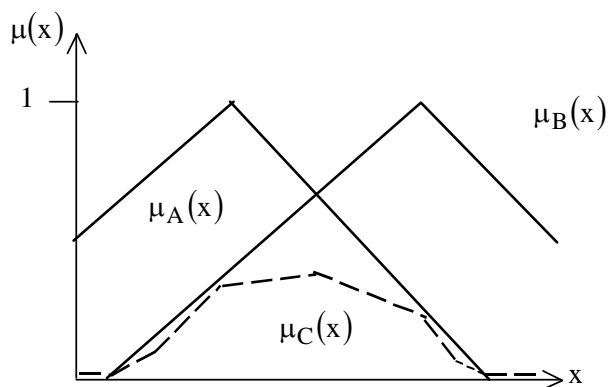


Fig.2.25: Die Zugehörigkeitsfunktion $\mu_C(x)$ charakterisiert das algebraische Produkt durch die folgende Definition:
 $\mu_C(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$.

Def.: Das Komplement A^C eines fuzzy sets A ist definiert durch die Negation seiner Zugehörigkeitsfunktion (siehe Fig.2.25):

$$\mu_{A^C} = 1 - \mu_A(x)$$

bzw.

$$A^C = \int_x (1 - \mu_A(x)) / x$$

h) Graphische Darstellung der Negation für eine Zugehörigkeitsfunktion

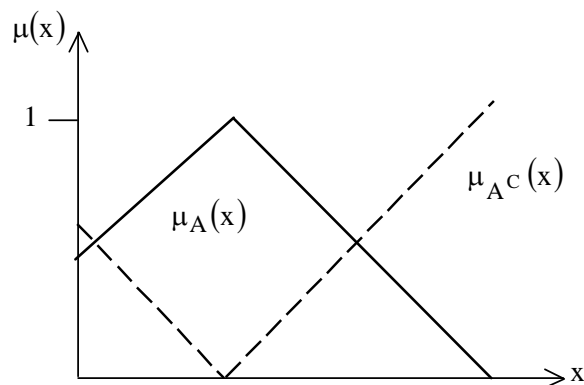


Fig. 2.26: Die Negation von Zugehörigkeitsfunktionen wird beschrieben durch die entsprechenden Komplemente. $\mu_{A^C}(x)$ ist das Komplement der Zugehörigkeitsfunktion $\mu_A(x)$.

Die Differenz von zwei Zugehörigkeitsfunktionen ist gegeben durch

$$\mu_C(x) = \mu_A(x) - \mu_B(x) = \max(0, \mu_A(x) - \mu_B(x)) .$$

Der Wertebereich ist definiert durch $\mu_C(x) \in [0,1]$, falls $\mu_A(x)$ und $\mu_B(x) \in [0,1]$.

i) Differenzbildung von Zugehörigkeitsfunktionen

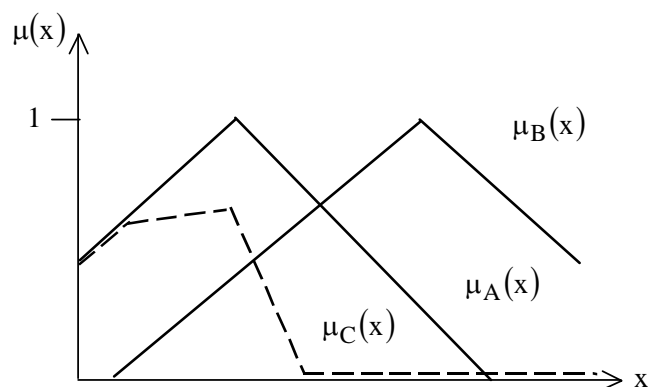


Fig.2.27: Durch Differenzbildung ergibt sich eine neue Zugehörigkeitsfunktion $\mu_C(x)$, mit Werten zwischen $[0,1]$.

2.4.2 Kompensatorische Operatoren

Kompensatorische Operatoren sind Operatoren die zwischen einem reinen UND und einem reinen ODER liegen.

a) Def.: Lambda-Operator

$$\mu_{A\lambda B}(x) = \lambda[\mu_A(x) \cdot \mu_B(x)] + (1-\lambda)[\mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)]$$

ODER-Operator für $\lambda = 0$,

UND-Operator für $\lambda = 1$.

$\lambda \in [0, 1]$ Grenzwerte:

b) Def.: Gamma-Operator

$$\mu_{A\gamma B}(x) = [\mu_A(x) \cdot \mu_B(x)]^{1-\gamma} \cdot [1 - (1-\mu_A(x)) \cdot (1-\mu_B(x))]^\gamma$$

ODER-Operator für $\gamma = 1$,

UND-Operator für $\mu_{A\gamma B}(x) \Big|_{\gamma=0} = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$ für $\gamma = 0$.

$\gamma \in [0, 1]$ Grenzwerte:

c) Def.: Gamma-Operator auf beliebig viele unscharfe Mengen:

$$\mu(x) \left[\prod_{i=1}^n \mu_i(x) \right]^{1-\gamma} \cdot \left[1 - \prod_{i=1}^n (1-\mu_i(x)) \right]^\gamma .$$

2.4.3 Schnittbildung: Modellierung Niveauewerte als Teilmengen

Bem.: In der Praxis begegnen uns verhältnismäßig häufig Mengen mit bewerteten Elementen und Bewertungen ob ein Schwellenwert erreicht bzw. darüberliegt. In solchen Fällen ist

es üblich, Schwellen- oder Niveauewerte zu erklären und Teilmengen zu bilden.

↓

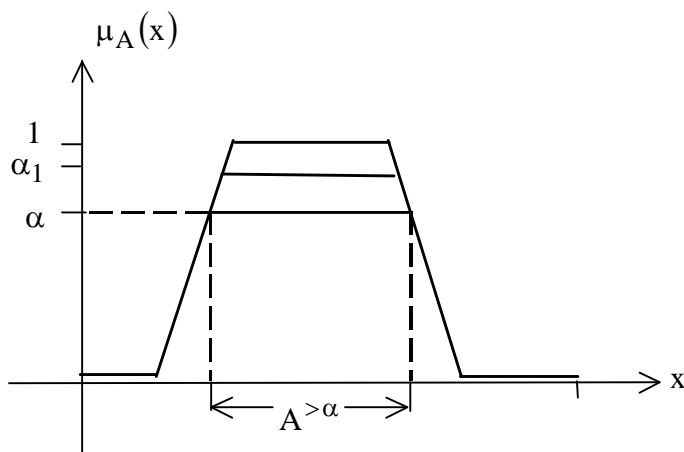
In der Fuzzy-Logik führen diese Überlegungen zu den α -Schnittmengen.

Def.: Sei A eine Fuzzy-Menge über der Grundmenge X und $\alpha \in [0, 1]$, dann heißt die Menge

$$A^{>\alpha} = \{x \in X \mid \mu_A(x) > \alpha\}$$

eine α -Schnittmenge (α -level set, α -cut) von A und

$$(A^C)^{>\alpha} = \{x \in X \mid \mu_A(x) \leq 1 - \alpha\} \text{ die Komplementbildung.}$$



Bem. (1) Spezialfall $\alpha = 0$: heißt Stütze oder Träger (support) von A .

$$(2) \quad \alpha \leq \alpha_1 \Rightarrow A^{>\alpha_1} \subset A^{>\alpha} \quad \forall \quad \alpha, \alpha_1 \in [0, 1]$$

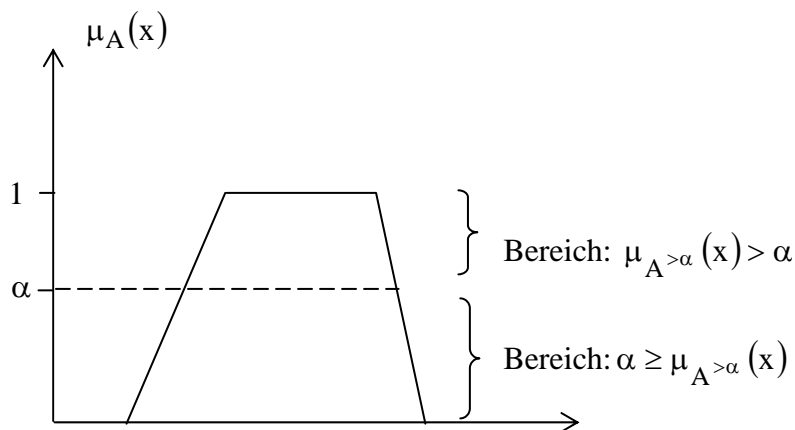
$$(3) \quad \mu_A(x) = \max_{\alpha} (\min(\alpha, \mu_{A^{>\alpha}}(x)))$$

Aussage (3) bedeutet: Jede Fuzzy-Menge kann durch ihre Schnittmengen dargestellt werden. Für ein $x \in X$ lässt sich der Wert $\mu_A(x)$ berechnen, wenn man für jedes $\alpha \in [0, 1]$ den Wert $\mu_{A^{>\alpha}}(x)$ kennt.

Erinnerung:

$$\min(a, b) = \begin{cases} a & a \leq b \\ b & a > b \end{cases}, \text{ falls}$$

$$\max(a, b) = \begin{cases} a & a \geq b \\ b & a < b \end{cases}, \text{ falls}$$



2.4.4 Rechengesetze für unscharfe Mengen

Erinnerung:

$$(1) A = \underbrace{\{(x, \mu_A(x)) \mid x \in X\}}$$

Jedes Element x der Grundmenge X hat einen Zugehörigkeitsgrad, dargestellt durch das Paar $(x, \mu_A(x))$.

- (2) Durch diese Paare sind die "unscharfen" Mengen als eine neue Qualität von Mengen, die Fuzzy-Mengen, erklärt und beschrieben.

Def.: Über der gemeinsamen Grundmenge X seien für die Elemente x die Fuzzy-Mengen

A mittels μ_A und B mittels μ_B erklärt. Es gelte

$A = B$ genau dann, wenn $\mu_A(x) = \mu_B(x) \quad \forall x \in X$.

$A \subset B$ genau dann, wenn $\mu_A(x) \leq \mu_B(x) \quad \forall x \in X$.

Zwei Fuzzy-Mengen sind als gleich, wenn gleiche elemente gleichen Zugehörigkeitsgrad haben.

Folge (1) Fortsetzung basierend auf der Gleichheitsbeziehung zwischen Fuzzy-Mengen:

- Reflexivität: $A = A$
- Symmetrie: $A = B \Rightarrow B = A$
- Transitivität: $A = B \wedge B = C \Rightarrow A = C$

Folge (2) Entsprechend setzen sich die eine Ordnungsrelation bestimmenden Eigenschaften der " \leq "-Beziehung von \mathbb{R} auf die " \subset "-Beziehung zwischen Fuzzy-Mengen fort:

- Reflexivität: $A \subset A \quad \mu_A(x) \leq \mu_A(x)$
- Antisymmetrie: $A \subset B \wedge B \subset A \Rightarrow A = B$
 $\mu_A(x) \leq \mu_B(x) \wedge \mu_B(x) \leq \mu_A(x) \Rightarrow \mu_A(x) = \mu_B(x)$
- Transitivität: $A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$
 $\mu_A(x) \leq \mu_B(x) \wedge \mu_B(x) \leq \mu_C(x) \Rightarrow \mu_A(x) \leq \mu_C(x)$.

Bem.: Wie in der klassischen Mengenalgebra gilt für Fuzzy-Mengen A, B ganz allgemein.

$$(1) \quad A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$$

$$\mu_A(x) \leq \mu_B(x) \Rightarrow \min(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mu_A(x)$$

$$(2) \quad A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$$

$$\mu_A(x) \leq \mu_B(x) \Rightarrow \max(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mu_B(x).$$

2.4.5 Struktureigenschaften

Definitionsgemäß wurde der Fuzzy-Durchschnitt auf die Minimumoperation, die Fuzzy-Vereinigung auf die Maximumoperation zurückgeführt. Sie bedürfen keines weiteren Beweises!

(1) Neutralelemente

$$\min(1, \mu_A(x)) = \mu_A(x) \Rightarrow X \cap A = A$$

$$\max(0, \mu_A(x)) = \mu_A(x) \Rightarrow \emptyset \cup A = A$$

(2) Kommutativität

$$\min(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \min(\mu_B(x), \mu_A(x)) \Rightarrow A \cap B = B \cap A$$

$$\max(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \max(\mu_B(x), \mu_A(x)) \Rightarrow A \cup B = B \cup A$$

Plausibel aufgrund Definition: $\max(a, b) = \begin{cases} a & a \geq b \\ b & a < b \end{cases}, \text{ falls}$
 $a \rightarrow b, b \rightarrow a$
 $\max(b, a) = \begin{cases} b & b \geq a \\ a & b < a \end{cases}, \text{ falls}$

(3) Assoziativität

$$\min(\min(\mu_A(x), \mu_B(x)), \mu_C(x)) = \min(\mu_A(x), \min(\mu_B(x), \mu_C(x)))$$

$$\Rightarrow (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$\max(\max(\mu_A(x), \mu_B(x)), \mu_C(x)) = \max(\mu_A(x), \max(\mu_B(x), \mu_C(x)))$$

$$\Rightarrow (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

(4) Monotonie

$$\mu_A(x) \leq \mu_C(x) \wedge \mu_B(x) \leq \mu_D(x) \Rightarrow \min(\mu_A(x), \mu_B(x)) \leq \min(\mu_C(x), \mu_D(x))$$

$$\Rightarrow A \subset C \wedge B \subset D \Rightarrow A \cap B \subset C \cap D$$

$$\max(\mu_A(x), \mu_B(x)) \leq \max(\mu_C(x), \mu_D(x))$$

$$\Rightarrow A \subset C \wedge B \subset D \Rightarrow A \cup B \subset C \cup D$$

(5) Idempotenz

$$\min(\mu_A(x), \mu_A(x)) = \mu_A(x) \Rightarrow A \cap A = A$$

$$\max(\mu_A(x), \mu_A(x)) = \mu_A(x) \Rightarrow A \cup A = A$$

(6) Distributivität

$$\min(\mu_A(x), \max(\mu_B(x), \mu_C(x))) = \max(\min(\mu_A(x), \mu_B(x)), \min(\mu_A(x), \mu_C(x)))$$

$$\Rightarrow A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$\max(\mu_A(x), \min(\mu_B(x), \mu_C(x))) = \min(\max(\mu_A(x), \mu_B(x)), \max(\mu_A(x), \mu_C(x)))$$

$$\Rightarrow A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

(7) Absorption

$$\min(\mu_A(x), \max(\mu_A(x), \mu_B(x))) = \mu_A(x) \Rightarrow A \cap (A \cup B) = A$$

$$\max(\mu_A(x), \min(\mu_A(x), \mu_B(x))) = \mu_A(x) \Rightarrow A \cup (A \cap B) = A$$

(8) DE MORGAN-Gesetze

$$1 - \min(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \max(1 - \mu_A(x), 1 - \mu_B(x))$$

$$\Rightarrow (A \cap B)^C = A^C \cup B^C$$

$$1 - \max(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \min(1 - \mu_A(x), 1 - \mu_B(x))$$

$$\Rightarrow (A \cup B)^C = A^C \cap B^C$$

(9) Gesetze der Komplementbildung

doppeltes Komplement: $1 - (1 - \mu_A(x)) = \mu_A(x) \Rightarrow (A^C)^C = A$

Komplement von Grand- und leerer Menge:

$$1 - 1 = 0 \Rightarrow (X)^C = \emptyset$$

$$1 - 0 = 1 \Rightarrow (\emptyset)^C = X$$

Inklusion: $A \subseteq B \Leftrightarrow B^C \subseteq A^C$

Vereinigung: $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

Schnittmenge: $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

Es gilt: $A \cap A^C \neq \emptyset$

$$A \cup A^C \neq X$$

aufgrund der Eigenschaften unscharfer Mengen.

Beispiel: Wahl $\mu_A(x) = 0.4$

Folge: $\min(\mu_A(x), 1 - \mu_A(x)) = \min(0.4, 0.6) = 0.4 \neq 0$

$$\max(\mu_A(x), 1 - \mu_A(x)) = \max(0.4, 0.6) = 0.6 \neq 1$$

(10) Definition für Familien unscharfer Mengen

Es sei Familien $(A_j \mid j \in J)$ unscharfer Mengen $\forall x \in X$ definiert:

Vereinigung: $C := \bigcup_{j \in J} A_j$ mit $\mu_C(x) := \sup_{j \in J} \mu_{A_j}(x)$

Durchschnitt: $D := \bigcap_{j \in J} A_j$ mit $\mu_D(x) := \inf_{j \in J} \mu_{A_j}(x)$

mit J als Indexmenge.

(11) Satz über α -Schnitte

Für die Fuzzy-Mengen A, B über X (Grundmenge) gilt für jedes $\alpha \in [0,1]$:

$$(A \cap B)^{>\alpha} = A^{>\alpha} \cap B^{>\alpha}$$

$$(A \cup B)^{>\alpha} = A^{>\alpha} \cup B^{>\alpha}$$

Interpretation: Der α -Schnitt des Durchschnitts (der Vereinigung) ist gleich dem Durchschnitt (der Vereinigung) der α -Schnitte.

Bem. Zur Bezeichnung:

$$\begin{array}{l} \searrow \rightarrow \text{ ODER [Disjunktion "v" lies oder]} \\ \mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \swarrow \rightarrow \text{ ODER [Konjunktion "^" lies und]} \\ \mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)) \end{array}$$

2.4.5 Binäre Operationen: Konzept t-Norm

Neben dem Minimum- und Maximum-Operator existieren weitere Operationen, die für eine Aggregation unscharfer Mengen Verwendung finden. Diese Operatoren genannt Dreiecks-Normen bzw. Dreiecks-Conormen sind seit langem bekannt. Sie wurden als t-Normen und t-Conormen in die Fuzzy-Theorie eingeführt und als Operatoren für Durchschnitt und Vereinigung von Fuzzy Sets vorgeschlagen (/Hö/). Hinsichtlich der zu realisierenden Verknüpfung sind sie kategorisierbar in t-Normen (Durchschnitt) in t-Conormen (Vereinigung). Es kann mit Hilfe der t-Norm konzeptionell ein Überbau geschaffen werden.

Def. t-Norm: Eine binäre Operation t in $[0,1]$ heißt t-Norm, es ist eine Abbildung $t: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$. In anderen Worten, die t-Norm ist eine zweistellige Funktion t in $[0,1]$. Diese Funktion ist symmetrisch, assoziativ und monoton wachsend, sie hat 0 als Nullelement und 1 als neutrales Element. Für beliebige $x, y, z, v, w \in [0,1]$ gelten die Eigenschaften:

(E1) Symmetrie : $t(x, y) = t(y, x)$,

(E2) Assoziativität : $t(x, t(y, z)) = t(t(x, y), z)$,

(E3) Operationen mit dem neutralen Element 1 und dem Nullelement:

$$t(x, 1) = x \quad \text{und wegen (E1)} \quad t(1, x) = x,$$

$$t(x, 0) = 0.$$

(E4) Monotonie: Ist $x \leq v$ und $y \leq w$, dann gilt:
 $t(x, y) \leq t(v, w)$.

Bem.:

(1) Zwecks übersichtlicher Schreibweise, wurden statt der bisher üblichen Argumente $\mu_A(x), \mu_B(x)$ etc. einfach x, y etc. geschrieben. Es ist dabei zu beachten, dass für alle Operanden $x, y, \dots \in [0, 1]$.

(2) 0 ist Nullelement für die t-Normen

$$\Leftrightarrow \mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

Interpretation: Eine t-Verknüpfung mit der 0 ergibt (unabhängig vom 2. Operanden) stets wieder 0 (siehe E3).

$$(3) \quad t(1, x) = x \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\min(\mu_A(x), \mu_B(x))}_{=1} = x$$

\Downarrow
 x

aufgrund der min-Eigenschaft.

Per Definition lässt sich zu einer t-Norm eine Durchschnittsbildung $A \cap_t B$ für unscharfe Mengen definieren:

$$C := A \cap_t B \text{ mit } \mu_C(x) := t(\mu_A(x), \mu_B(x)) \quad \forall x \in X .$$

Folge: Aufgrund der Symmetrie und Assoziativität vorstehender Durchschnittsbildung \cap_t , folgt:

$$A \cap_t B = B \cap_t A ,$$

$$A \cap_t (B \cap_t C) = (A \cap_t B) \cap_t C ,$$

$$A \cap_t \emptyset = \emptyset , \quad A \cap_t X = A \quad \text{für } A, B, C \in F(X) .$$

Obige Durchschnittsbildungen werden von t-Normen erzeugt. Deshalb gelten die folgenden Beziehungen:

$$A \cap_t B \subseteq A \quad \text{und} \quad A \cap_t B \subseteq B ,$$

ferner

$$A \cap_t B \subseteq A \cap B .$$

Zu jeder Durchschnittsbildung \cap_t lässt sich eine duale Vereinigungsbildung \cup_t wie folgt definieren:

$$A \cup_t B := (A^c \cap_t B^c)^c .$$

Unmittelbar folgen hieraus die deMorgan'schen Gesetze

$$(A \cap_t B)^C = A^C \cup_t B^C,$$

$$(A \cup_t B)^C = A^C \cap_t B^C,$$

bezüglich jeder t-Norm für A und B.

Die andere Klasse allgemeiner Operatoren heißen t-Conormen, sie werden auch als s-Normen bezeichnet. Die Anwendungen dieser Klasse liegen bei der Vereinigungsbildung unscharfer Mengen. Der Maximums-Operator ist ein Vertreter aus der Klasse der t-Conormen.

Def. t-Conorm: Eine t-Conorm (oder s-Norm) ist eine Abbildung $s: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$.

Es gelten folgende Eigenschaften:

(E5) Symmetrie: $s(x,y) = s(y,x)$,

(E6) Assoziativität: $s(x,s(y,z)) = s(s(x,y),z)$,

(E7) spezielle Operationen:

$$s(x,0) = s(0,x) = x,$$

$$s(x,1) = 1 \text{ und } s(1,x) = 1 \text{ wegen (E5)}$$

(E8) Monotonie: Ist $x \leq v$ und $y \leq w$, dann gilt:

$$s(u,v) \leq s(v,w).$$

Bem.: (1) 1 ist Einselement für die s-Normen

$$\Leftrightarrow \mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

$$\Leftrightarrow s(1,x) = 1 \quad \forall x \in [0,1]$$

Interpretation: Eine s-Verknüpfung mit der 1 ergibt (unabhängig vom 2. Operanden) stets wieder die 1 als Resultat.

$$(2) \quad s(x,0) = [s(0,x)]x \Leftrightarrow \max(\underbrace{\mu_A(x)}_x, \underbrace{\mu_B(x)}_{=0}) = x$$

aufgrund der Eigenschaft der max-Operation.

Es lässt sich aus der Vereinigungsbildung $A \cup_s B$ definieren.

$$C := A \cup_s B \text{ mit } \mu_C(x) = s(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

Es gilt ferner für jede der Vereinigungsbildungen \cup_s zwischen den unscharfen Mengen

$$A \cup_s B = B \cup_s A ,$$

$$A \cup_s (B \cup_s C) = (A \cup_s B) \cup_s C ,$$

$$A \cup_s \emptyset = A, A \cup_s X = X$$

Wegen einer weiteren Behandlung der Durchschnitts- und Vereinigungsbildung sei auf die Monographie von Bandemer /Gottwald (/Ba1/) verwiesen.

Jeder t-Norm t ist eindeutig eine t-Conorm s zugeordnet und umgekehrt, d.h. zwischen der t-Norm und der t-Conorm gibt es ein funktioneller Zusammenhang (/Schw/)

$$s_t(x, y) = 1 - t(1 - x, 1 - y),$$

$$t_s(x, y) = 1 - s(1 - x, 1 - y).$$

Auflistung einiger nichtparametrisierte Operatoren: t-Normen und s-Normen (t-Conormen).

Durchschnitt t_d und Vereinigung s_v :

$$t_d(x, y) = \min \{x, y\}$$

$$s_v(x, y) = \max \{x, y\}$$

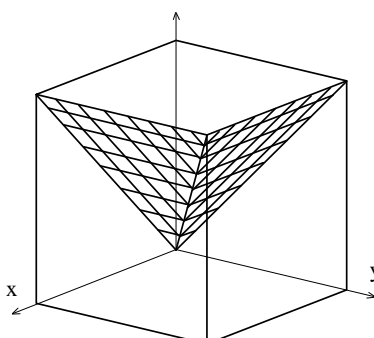
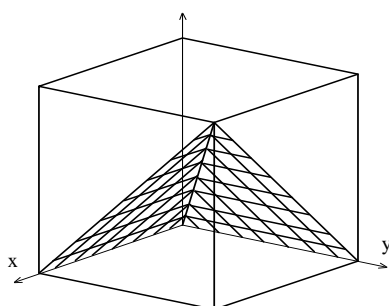


Tabelle t- und s-Normen

	t-Norm	s-Norm
Zadeh	Durchschnitt $t(x, y) = \min\{x, y\}$	Vereinigung $s(x, y) = \max\{x, y\}$
Lukasiewicz	beschränktes Produkt $t_b(x, y) = \max\{0, x + y - 1\}$	beschränkte Summe $s_b(x, y) = \min\{1, x + y\}$
	algebraisches Produkt $t_a(x, y) = x \cdot y$	algebraische Summe $s_a(x, y) = x + y - x \cdot y$
	drastisches Produkt	drastische Summe

	$t_{dp}(x, y) = \begin{cases} \min\{x, y\}, & \text{falls } x = 1 \\ & \text{oder } y = 1, \\ 0, & \text{falls } x, y < 1. \end{cases}$	$s_{ds}(x, y) = \begin{cases} \max\{x, y\}, & \text{falls } x = 0 \\ & \text{oder } y = 0, \\ 1, & \text{falls } x, y > 0. \end{cases}$
Hamacher ($p \geq 0$)	Produkt $t_h(x, y) = \frac{x \cdot y}{p + (1-p) \cdot (x + y - x \cdot y)}$	Summe $s_h(x, y) = \frac{x + y - x \cdot y - (1-p) \cdot x \cdot y}{1 - (1-p) \cdot x \cdot y}$
Einstein	Produkt $t_e(x, y) = \frac{x \cdot y}{1 + (1-x)(1-y)}$	Summe $s_e(x, y) = \frac{x + y}{1 + x \cdot y}$
Frank ($p > 0, p \neq 1$)	Produkt $t_f(x, y) = \log_p \left[1 + \frac{(p^x - 1) \cdot (p^y - 1)}{p - 1} \right]$	Summe $s_f(x, y) = \log_p \left[1 + \frac{(p^{1-x} - 1) \cdot (p^{1-y} - 1)}{p - 1} \right]$
Yager ($p > 0$)	$t_{ya}(x, y) = 1 - \min \left(1, \left((1-x)^p + (1-y)^p \right)^{1/p} \right)$	$s_{ya}(x, y) = \min \left(1, \left(x^p + y^p \right)^{1/p} \right)$ $, p \in \mathbb{R}$
Schweizer (1) ($p > 0$)	$t_{s1}(x, y) = \left(\max(0, x^p + y^p - 1) \right)^{1/p}$	$s_{s1}(x, y) = 1 - \max \left(0, \left((1-x)^p + (1-y)^p - 1 \right)^{1/p} \right)$
Schweizer (2) ($p > 0$)	$t_{s2}(x, y) = \left(\frac{1}{x^p} + \frac{1}{y^p} - 1 \right)^{-1/p}$	$s_{s2}(x, y) = 1 - \left(\frac{1}{(1-x)^p} + \frac{1}{(1-y)^p} - 1 \right)^{-1/p}$
Schweizer (3) ($p > 0$)	$t_{s3}(x, y) = 1 - \left((1-x)^p + (1-y)^p - (1-x)^p \cdot (1-y)^p \right)^{1/p}$	$s_{s3}(x, y) = \left(x^p + y^p - x^p \cdot y^p \right)^{1/p}$
Dombi ($p > 0$)	$t_{do}(x, y) = \frac{1}{1 + \left[\left(\frac{1-x}{x} \right)^p + \left(\frac{1-y}{y} \right)^p \right]^{1/p}}$	$s_{do}(x, y) = 1 - \frac{1}{1 + \left[\left(\frac{x}{1-x} \right)^p + \left(\frac{y}{1-y} \right)^p \right]^{1/p}}$
Weber ($p \geq -1$)	$t_w(x, y) = \max(0, (1+p) \cdot (x + y - 1) - pxy)$	$s_w(x, y) = \min(1, x + y + pxy)$
Dubois ($0 \leq p \leq 1$)	$t_{du}(x, y) = \frac{xy}{\max(x, y, p)}$	$s_{du}(x, y) = 1 - \frac{(1-x)(1-y)}{\max((1-x), (1-y), p)}$

Hinweis: Es existiert eine Ordnungsrelation für die aufgelisteten t- und s-Normen bezüglich ihrer Rückgabewerte:

$$t_{dp} \leq t_b \leq t_e \leq t_a \leq t_n \leq t \leq s \leq s_h \leq s_a \leq s_e \leq s_b \leq s_{ds}.$$

Aufgabe: zu zeichnen

Hamacher Produkt t_h und Hamacher Summe s_h :

$$t_h(x, y) = \frac{x \cdot y}{x + y - x \cdot y},$$

$$s_h(x, y) = \frac{x + y - 2 \cdot x \cdot y}{1 - x \cdot y}.$$

Aufgabe: zu zeichnen

Algebraisches Produkt t_a und algebraische Summe s_a :

$$t_a(x, y) = x \cdot y,$$

$$s_a(x, y) = x + y - x \cdot y.$$

Aufgabe: zu zeichnen

Einstein Produkt t_e und Einstein-Summe s_e :

$$t_e(x, y) = \frac{x \cdot y}{1 + (1-x)(1-y)},$$

$$s_e(x, y) = \frac{x + y}{1 + x \cdot y}.$$

Aufgabe: zu zeichnen

Beschränktes Produkt t_b und beschränkte Summe s_b :

$$t_b(x, y) = \max\{0, x + y - 1\},$$

Aufgabe: zu zeichnen

Drastisches Produkt t_{dp} und drastische Summe s_{ds} :

$$t_{dp}(x, y) = \begin{cases} \min\{x, y\}, & \text{falls } x = 1 \text{ oder } y = 1, \\ 0, & \text{falls } x, y < 1. \end{cases}$$

$$s_{ds}(x, y) = \begin{cases} \max\{x, y\}, & \text{falls } x = 0 \text{ oder } y = 0, \\ 1, & \text{falls } x, y > 0. \end{cases}$$

Bem.: **Lösungen zu den Aufgaben in /GRA/ und /May/.**

Hinweis auf die Eigenschaft Idempotenz

$$\min(x, x) = x \Rightarrow A \cap A = A$$

$$\max(x, x) = x \Rightarrow A \cup A = A$$

Fuzzy-logische Aussagen sollen bei mehrmaliger Wiederholung im Sinne von "und" bzw. "oder" weder "wahrer" noch "falscher" werden, d.h. den Wert der Zugehörigkeit unverändert lassen Aussagen der (Idempotenzgesetze).

Bem.: Unter allen t- und s-Normen besitzt nur min und max diese Eigenschaft.

3. Unscharfe Relationen

a) Klassische zweiwertige Logik

Zwei-stellige (binäre) Beziehungen werden durch Paarmengen mittels des kartesischen Produkts definiert:

$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$, "x" gelesen kreuz (das Zeichen symbolisiert kein Vektorprodukt sondern ein Kreuzproduktmenge).

Auf der Grundmenge der Paare kann eine Relationsvorschrift \mathcal{R} definiert werden, die aus der Menge $X \times Y$ aller Paare diejenigen Paare mit bestimmter Eigenschaft herausfiltert, welche die Vorschrift \mathcal{R} erfüllen. Die so definierte Teilmenge R von $X \times Y$ heißt zweistellige Relation

$$R = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y, \mathcal{R}\} .$$

Beispiel: Gegeben seien die Zahlenmengen $X = \{2, 3, 5\}$, $Y = \{6, 7, 8, 9, 10\}$ und als Relationsvorschrift \mathcal{R} das zweistellige Prädikat "x ist Teiler von y". Es gibt $3 \cdot 5 = 15$ Paare insgesamt:

$$\begin{aligned} X \times Y = \{ & (2, 6), (2, 7), (2, 8), (2, 9), (2, 10), \\ & (3, 6), (3, 7), (3, 8), (3, 9), (3, 10), \\ & (5, 6), (5, 7), (5, 8), (5, 9), (5, 10) \} . \end{aligned}$$

Aber Paare mit der Eigenschaft "x ist Teiler von y" enthält nur die Relation:

$$R = \{(2, 6), (2, 8), (2, 10), (3, 6), (3, 9), (5, 10)\} ,$$

also insgesamt existieren nur sechs Paare. \mathcal{R} enthält sechs Paare.

Klassisch gilt streng die zweiwertige Alternative:

$$\begin{aligned} \text{entweder: } & (x, y) \in R \Leftrightarrow \mathcal{R} \Leftrightarrow \mu_R(x, y) = 1 \\ \text{oder} & : (x, y) \in R \Leftrightarrow \neg \mathcal{R} \Leftrightarrow \mu_R(x, y) = 0 \end{aligned}$$

Die zweistellige charakteristische Funktion μ_R

$$\mu_R : X \times Y \rightarrow \{0, 1\} ,$$

nimmt bei Erfüllung \mathcal{R} den Wert = 1 an, bei Nichterfüllung $\neg \mathcal{R}$ den Wert = 0.

b) Fuzzy-wertige Logik

Mit einfach "wahr" (erfüllt) oder "falsch" (nicht erfüllt) lassen sich die Vorschriften

"x ist näherungsweise gleich y",

"x ist befreundet mit y",

"x hat ähnliche Eigenschaften wie y" , etc. nicht beschreiben.

Die Beschreibung führt uns zum Begriff Fuzzy-Relation.

3.1 Mathematische Grundbegriffe

Die Verknüpfung zweier Mengen kann als Relation betrachtet werden. Es soll nun der formale Begriff "Fuzzy-Relation" eingeführt werden. In diesem Zusammenhang wird dann die "Komposition" als spezielle Relation zwischen drei Mengen definiert und zwar als formale Basis für die "kompositorische Inferenzregel".

Unscharfe Relationen sind unscharfe Beziehungen zwischen zwei und mehreren Objekten, Sachverhalten, Größen etc.. Von besonderer Wichtigkeit sind die binären (zweistelligen) Relationen.

Def.: Eine Fuzzy-Relation R ("fuzzy relation") von einer Menge X zu einer Menge Y ist eine Fuzzy-Menge des kartesischen Produktes $X \times Y$ im Grundbereich G :

$$G = X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \wedge y \in Y\} .$$

Folglich ist eine unscharfe Relation R in G eine unscharfe Teilmenge von G :

$$R \in F(G)$$

Zweistellige Zugehörigkeitsfunktion: Die jetzt alle Werte des abgeschlossenen Intervalls $[0,1]$ auf \mathbb{R} annehmen kann

$$\mu_R : X \times Y \rightarrow [0,1] .$$

Zugehörigkeitswert $\mu_R(x, y)$ ist der Grad mit dem die unscharfe Relation R auf die Objekte (x, y) zutrifft.

Def.:

$$\mu_R(x, y) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{voll und ganz} \\ , \text{ dass } R \text{ auf } (x, y) & \\ 0 & \text{überhaupt nicht} \end{array} \right\} \text{ zutrifft.}$$

Ist der Grundbereich G ein kartesisches Produkt $G = X \times Y$ endlicher Mengen, so kann die binäre Relation R durch eine Matrix mit Elementen aus $[0,1]$ dargestellt werden.

Beispiel: Sei $X = \{x_1, x_2\}$ und $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$, so beschreibt beispielsweise R in $X \times Y$ die unscharfe Relation

$$R = \begin{matrix} & \begin{matrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1.0 & 0.2 & 0.0 \\ 0.5 & 0.7 & 0.1 \end{pmatrix} \end{matrix},$$

mit den Zugehörigkeitswerten

$$\begin{aligned} \mu_R(x_1, y_1) &= 1.0, & \mu_R(x_1, y_2) &= 0.2, & \mu_R(x_1, y_3) &= 0.0, \\ \mu_R(x_2, y_1) &= 0.5, & \mu_R(x_2, y_2) &= 0.7 & \text{und} & \mu_R(x_2, y_3) &= 0.1. \end{aligned}$$

Def.: $R = \{(x, y), \mu_R(x, y) \mid x \in X \wedge y \in Y\}$,

heißt zweistellige (binäre) Fuzzy-Relation auf G .

Entsprechend repräsentiert eine **Kreuzproduktmenge** aus n Grundmengen (n -faches Kartesisches Produkt), eine n -stellige Fuzzy-Relation. Folge: Die bisher betrachteten Fuzzy-Mengen waren einstellige Fuzzy-Relationen, d.h. Kennlinien über einer Grundmenge. Eine zweistellige Fuzzy-Relation kann als Fläche über der Grundmenge G interpretiert werden. Eine zweistellige Fuzzy-Relation auf diskreten endlichen Grundmengen kann als **Fuzzy-Relationsmatrix** dargestellt werden.

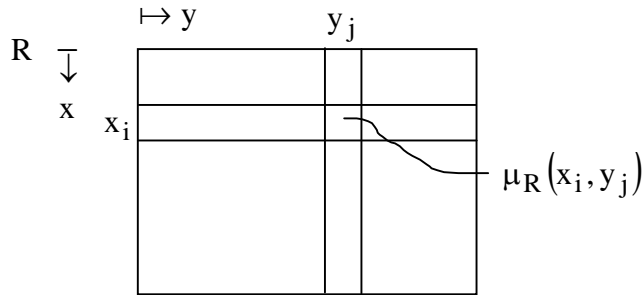
Interpretation von $R = \{(x, y), \mu_R(x, y) \mid x \in X \wedge y \in Y\}$:

$$(1) \quad R = \{(x, y), \mu_R(x, y) = 1 \mid x \in X \wedge y \in Y\} =: X \times Y$$

$X \times Y$ kann als spezielle Fuzzy-Relation interpretiert werden, besitzen alle Paare den Wert 1, so ist: $R \subseteq X \times Y$.

$$(2) \quad R = \{(x, y), \mu_R(x, y) = 0 \mid x \in X \wedge y \in Y\} =: \emptyset \text{ ist eine spezielle Fuzzy-Relation, deren sämtliche Paare mit 0 bewertet sind.}$$

(3) Matrixdarstellung



(4) Notation von ZADEH

$$R = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{\mu_R(x_i, y_j)}{(x_i, y_j)} =: \sum_{i,j=1}^{m,n} \frac{\mu_R(x_i, y_j)}{(x_i, y_j)}$$

$$= \sum_{i,j=1}^{m,n} \mu_R(x_i, y_j) / (x_i, y_j)$$

für endliche Fuzzy-Relationen $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$,
 $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$.

$$R = \int_{X \times Y} \frac{\mu_R(x, y)}{(x, y)} = \int_{X \times Y} \mu_R(x, y) / (x, y) .$$

Beispiel Farbe-Reifegrad-Relation: Modellierung des bekannten Zusammenhangs in Form einer Relationsmatrix zwischen Farbe x und Reifegrad y einer Frucht mit den möglichen Farben $X = \{\text{grün, gelb, rot}\}$ und Reifegrade $Y = \{\text{unreif, halbreif, reif}\}$. Als binäre Relationsmatrix mit Elementen aus $\{0, 1\}$:

R:	unreif	halbreif	reif	
grün	1	0	0	\Rightarrow Relationsmatrix $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
gelb	0	1	0	
rot	0	0	1	

Interpretation der Relationsmatrix: WENN eine Frucht grün ist, DANN ist sie unreif. WENN eine Frucht gelb ist, DANN ist sie halbreif oder WENN eine Frucht rot ist, DANN ist sie reif.

Grün ist eindeutig unreif zugeordnet, etc. Soll aber überdies noch formuliert werden, dass zu einem gewissen Prozentsatz eine grüne Frucht durchaus als halbreif angesehen werden kann, beispielsweise mit graduellen Zugehörigkeiten:

$\mu_R(\text{grün, unreif}) = 1.0$, $\mu_R(\text{grün, halbreif}) = 0.5$,
 $\mu_R(\text{grün, reif}) = 0.0$, $\mu_R(\text{gelb, unreif}) = 0.25$,
 $\mu_R(\text{gelb, halbreif}) = 1.0$, $\mu_R(\text{gelb, reif}) = 0.25$,
 $\mu_R(\text{rot, unreif}) = 0.0$, $\mu_R(\text{rot, halbreif}) = 0.5$, und
 $\mu_R(\text{rot, reif}) = 1.0$. Darstellung als Fuzzy-Relationsmatrix R
 mit $\mu_R \in [0,1]$:

$$R = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.5 & 0.0 \\ 0.25 & 1.0 & 0.25 \\ 0.0 & 0.5 & 1.0 \end{pmatrix}.$$

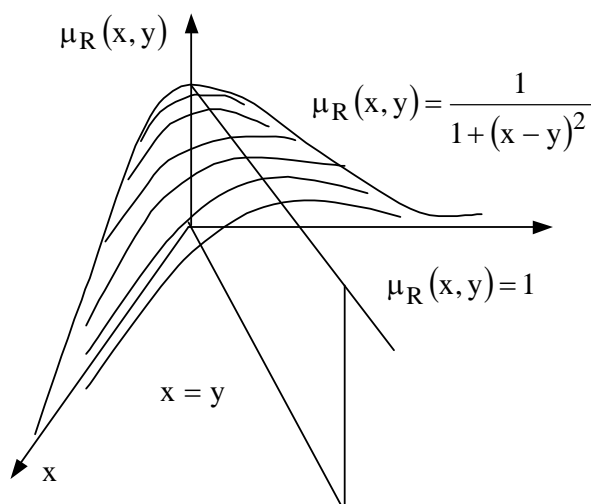
3.2 Relationen und Rechenregeln

a) Rechenregel für die Verknüpfung von Fuzzy-Mengen, z.B.
 $\mu_1 : X \rightarrow [0,1]$ und $\mu_2 : Y \rightarrow [0,1]$ auf unterschiedlichen
 Grundmengen mit der UND-Verknüpfung, d.h. dem min-
 Operator liefert:

$\mu_R(x, y) = \min(\mu_1(x), \mu_2(y))$ oder Schreibweise $(\mu_1 \times \mu_2)(x, y)$
 $= \min(\mu_1(x), \mu_2(y))$, mit der Abbildung $\mu_1 \times \mu_2 : G \rightarrow [0,1]$
 mit $G = X \times Y$.

Interpretation: Das Ergebnis der Verknüpfung ist eine Fuzzy-
 Relation R auf der Kreuzproduktmenge (Kartesisches Produkt
 der Fuzzy-Mengen) G mit $(x, y) \in G$.

Beispiel: $\mu_R(x, y) = \frac{1}{1 + (x - y)^2}$ auf $G = \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+$.



Symmetrie von R :

$$\mu_R(y, x) = \frac{1}{1 + (y - x)^2} = \frac{1}{1 + (x - y)^2} = \mu_R(x, y)$$

Reflexivität von R: Eigenschaft für $y = x$

$$\mu_R(x, x) = 1.$$

D.h. jedes Element steht mit sich selbst mit dem Wert 1 in Relation.

b) Sind X und Y diskrete Mengen und somit $\mu_1(x)$, $\mu_2(y)$ als Vektoren ($\mu_1^T(x)$ ist der zu $\mu_1(x)$ transponierte Vektor) darstellbar, so gilt (symbolisch):

$$\mu_1 \times \mu_2 = \mu_1^T \circ \mu_2 \quad \text{und}$$

$$\mu_{R^{-1}}(x, y) := \mu_R(y, x) \quad \forall (x, y) \in G.$$

Verknüpfungoperator \circ steht nicht für das übliche Matrizenprodukt, die Produktbildung wird durch die min-Operation und die Addition durch den max-Operator ersetzt (siehe auch (d.2) unten).

Interpretation: Der Grad des Zutreffens einer inversen Relation R^{-1} auf die Objekte (x, y) ist also stets gleich dem Grad des Zutreffens von R auf die Objekte (y, x) .

Rechenregel für die Verknüpfung von Fuzzy-Relationen auf derselben Produktmenge lassen sich wie folgt angeben: Es seien zweistellige Fuzzy-Relationen $R_1, R_2: X \times Y \rightarrow [0, 1]$ und $(x, y) \in G$ gegeben, mit denen Rechenregeln aufgestellt werden können.

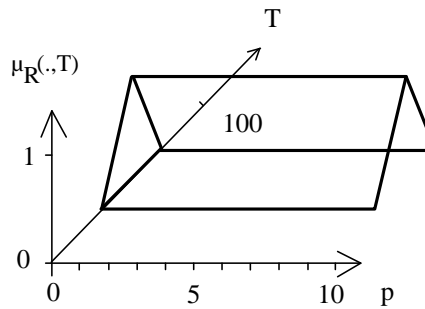
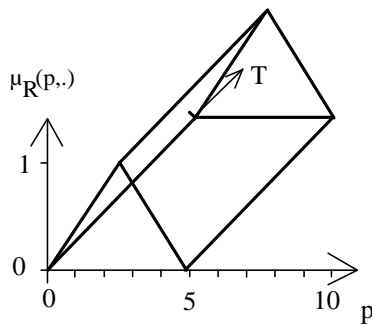
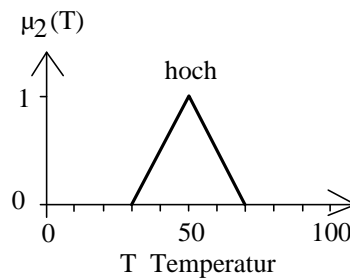
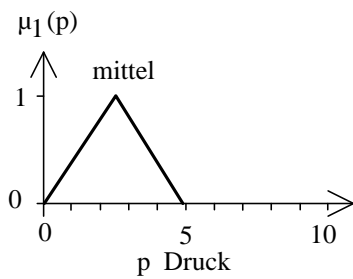
c) Die Rechenregeln für eine **UND-Verknüpfung** erfolgt über den **min-Operator**:

$$\mu_{R_1 \cap R_2}(x, y) = \min(\mu_{R_1}(x, y), \mu_{R_2}(x, y)).$$

Eine entsprechende Berechnungsvorschrift für die **ODER-Verknüpfung** durch den **max-Operator** ist gegeben:

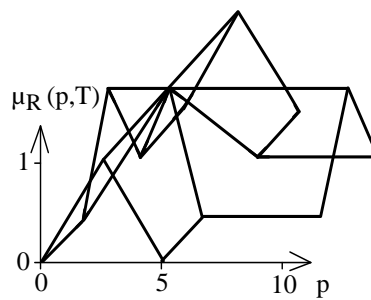
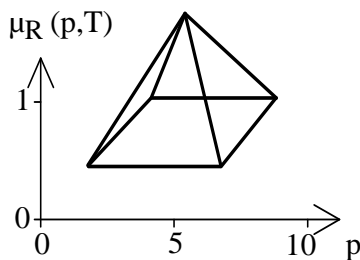
$$\mu_{R_1 \cup R_2}(x, y) = \max(\mu_{R_1}(x, y), \mu_{R_2}(x, y)).$$

Beispiel: Bildung einer Fuzzy-Relation



Zylindrische Erweiterung (eingeführt von Zadeh) der Fuzzy-Menge mittlerer Druck:
 $\tilde{\mu}_1(p,T) = \mu_1(p) \quad \forall T \in X_2$ und
 $\mu_1 : X_1 \rightarrow [0,1]$.

Zylindrische Erweiterung der Fuzzy-Menge hohe Temperatur:
 $\tilde{\mu}_2(p,T) = \mu_2(T) \quad \forall p \in X_1$ und
 $\mu_2 : X_2 \rightarrow [0,1]; \tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2 : G \rightarrow [0,1]$



Fuzzy-Relation mittlerer Druck UND hohe Temperatur wurden
 Mit dem **min-Operator** verknüpft:
 $\mu_R(p, T) = \min(\mu_1(p), \mu_2(T))$.

Fuzzy-Relation mittlerer Druck ODER hohe Temperatur wurden mit dem
max-Operator verknüpft:
 $\mu_R(p, T) = \max(\mu_1(p), \mu_2(T))$.

d) Fuzzy-Relationsprodukt $R \circ S$

Es seien $R \in F(X \times Y)$ und $S \in F(Y \times Z)$ aber auch speziell $R, S \in F(G)$ mit Menge der Relationen über Kreuzproduktmenge und $G \subseteq X \times Y$, dann versteht man unter der Verkettung oder dem Fuzzy Relationsprodukt $R \circ S$:

$$\mu_{R \circ S}(x, z) := \sup_{y \in Y} \{ \min(\mu_R(x, y), \mu_S(y, z)) \} \quad \forall (x, z) \in X \times Z. \quad (*)$$

Interpretation: Sei R eine Relation von X nach Y und S eine Relation von Y nach Z dann sind folgende Kompositionen möglich:

d1) Wird die Komposition $R \circ S$ aus R und S als ein Max-Min-Produkt definiert, so wird vorstehendes Fuzzy-Kompositionsprodukt als **max-min-Komposition** bezeichnet. Anmerkung: \sup steht für Supremum, und wird hier als max-Operation interpretiert.

d2) Wird die Produktbildung wie bei der bekannten Matrix-Multiplikation vorgenommen, so erhalten wir die **max-prod-Komposition**.

d3) Bei der **max-average-Komposition** wird die "Multiplikation" durch Mittelwertbildung ersetzt.

Bem.: Statt des min-Operators im Relationsprodukt $R \circ S$ Gl. (*) kann auch eine t-Norm genommen werden. Es kann zu jeder t-Norm t ein zugehöriges Relationsprodukt $R \circ_t S$ definiert werden.

Def.: $T = R \circ_t S$:

$$\mu_T(x, z) = \mu_{R \circ_t S}(x, z) := \sup_{y \in Y} \{ \mu_R(x, y) t \mu_S(y, z) \} \quad \forall (x, z) \in X \times Z.$$

e) Fuzzy-logisches Schließen mit WENN-DANN-Regel ist möglich über die Komposition $\mu_2 = \mu_1 \circ R$. Die Fuzzy-Menge

μ_2 repräsentiert die gesuchte Schlussfolgerung. Der analytische Zusammenhang ist gegeben durch:

$$\mu_2(y) = \max_{x \in X} (\min(\mu_1(x), \mu_R(x, y))) ,$$

mit

$$y \in Y, \mu_1 : X \rightarrow [0,1], \mu_2 : Y \rightarrow [0,1], R : G \rightarrow [0,1] \text{ und } G = X \times Y .$$

Ergänzung:

Verwendet man über endlichen Grundbereichen die Matrixdarstellung, so lässt sich die Verknüpfung $R \circ S$ wie folgt motivieren: Es seien gegeben

$X = \{x_1, \dots, x_n\}$; $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$, $Z = \{z_1, \dots, z_\ell\}$ und

$R \in F(X \times Y)$, $S \in F(Y \times Z)$ sowie die Matrixdarstellung von R und S in der Form

$$R = (r_{ij}) \text{ und } S = (s_{jk}) \text{ mit } i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m; k = 1, \dots, \ell$$

$$\text{sowie } r_{ij} = \mu_R(x_i, y_j) \text{ und } s_{jk} = \mu_S(y_j, z_k).$$

Wird für die Verknüpfung $T = R \circ S$ die Matrixdarstellung t_{ik} gewählt, dann ist,

$$t_{ik} = \sup_j \min\{r_{ij}, s_{jk}\}$$

Als Ergebnis erhält man nicht die übliche Form der Matrixmultiplikation da die Supremumbildung anstelle der Summenbildung und die Minimumbildung anstelle der Produktbildung zur Anwendung kommen.

Bem: Mit den Darstellungen für r_{ij} und s_{jk} sowie mit Gl. (*)

kann die inverse Relation R^{-1} durch die zu r_{ij} transponierte

Matrix $R^{-1} = (r_{ij})^T$ dargestellt werden.

Beispiel: Es seien $X = \{\text{Tom, Harry}\}$ und $Y = \{\text{John, Jim}\}$ gegeben. Eine binäre Fuzzy Relation "Ähnlichkeit" zwischen Mitgliedern von X und Y könnte folgendermaßen aussehen:

$$\begin{aligned} \text{Ähnlichkeit} = & 0.8/(\text{Tom, John}) + 0.6/(\text{Tom, Jim}) + 0.2/(\text{Harry, John}) \\ & + 0.9/(\text{Harry, Jim}). \end{aligned}$$

Dies kann auch als Relationsmatrix ("relation matrix" geschrieben werden:

$$\begin{array}{cc} & \text{John} \quad \text{Jim} \\ \text{Tom} & \begin{pmatrix} 0.8 & 0.6 \end{pmatrix} \\ \text{Harry} & \begin{pmatrix} 0.2 & 0.9 \end{pmatrix} \end{array}$$

Beispiel: Zur Veranschaulichung sei vorstehendes Beispiel fortgeführt. Es sei $Z = \{\text{Arthur}, \text{Georg}\}$ und die Ähnlichkeits-Relationsmatrix μ_S zwischen Y und Z sei gegeben zu:

$$\begin{array}{cc} & \text{Arthur} \quad \text{Georg} \\ \text{John} & \begin{pmatrix} 0.5 & 0.9 \end{pmatrix} \\ \text{Jim} & \begin{pmatrix} 0.4 & 1.0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Die Relationsmatrix für $R \circ S$ zwischen X und Z ergibt sich dann z.B. aus dem Max-Min-Produkt:

$$\begin{pmatrix} 0.8 & 0.6 \\ 0.2 & 0.9 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0.5 & 0.9 \\ 0.4 & 1.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.8 \\ 0.4 & 0.9 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \text{Tom} \\ \text{Harry} \\ \text{Arthur} \quad \text{Georg} \end{array}$$

bzw. komponentenweise ausführlich gemäß Definition:
Matrizelement

$$\begin{aligned} (1,1) &: \text{SUP}[\text{MIN}(0.8, 0.5), \text{MIN}(0.6, 0.4)] = \text{SUP}[0.5, 0.4] = 0.5, \\ (1,2) &: \text{SUP}[\text{MIN}(0.8, 0.9), \text{MIN}(0.6, 1.0)] = \text{SUP}[0.8, 0.6] = 0.8, \\ (2,1) &: \text{SUP}[\text{MIN}(0.2, 0.5), \text{MIN}(0.9, 0.4)] = \text{SUP}[0.2, 0.4] = 0.4, \\ (2,2) &: \text{SUP}[\text{MIN}(0.2, 0.9), \text{MIN}(0.9, 1.0)] = \text{SUP}[0.2, 0.9] = 0.9. \end{aligned}$$

Interpretation: Die Matrix $R \circ S$ gibt die Zugehörigkeitswerte zwischen den einzelnen Personen an.

Beispiel: max-min-Komposition und max-prod-Komposition

a) max-min-Komposition:

$$\mu_{R \circ S}(x, z) = \overbrace{\sup_{y \in Y} \min(\mu_R(x, y), \mu_S(y, z))}^{\text{ersetzt durch max}} \quad (*)$$

Gegeben seien die (klassischen) Mengen

$$X = \{x_1, x_2, x_3\}, \quad Y = \{y_1, y_2\}, \quad Z = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$$

			S	z ₁	z ₂	z ₃	z ₄
			y ₁	0.1	0.3	0.8	1.0
			y ₂	1.0	0.5	0.6	0.1

R	y ₁	y ₂	R ∘ S	z ₁	z ₂	z ₃	z ₄
x ₁	0.4	0.2	x ₁	0.2	0.3	0.4	0.4
x ₂	0.9	0.5	x ₂	0.5	0.5	0.8	0.9
x ₃	0.1	1.0	x ₃	1.0	0.5	0.6	0.1

x₂, z₃: $\mu_{R \circ S}(x_2, z_3) = ?$

$$\begin{aligned} \mu_{R \circ S}(x_2, z_3) &= \max_{y \in \{y_1, y_2\}} \min(\mu_R(x_2, y), \mu_S(y, z_3)) \\ &= \max(\min(0.9, 0.8), \min(0.5, 0.6)) \\ &= \max(0.8, 0.5) \\ &= \underline{\underline{0.8}} \end{aligned}$$

x₁, z₁: $\mu_{R \circ S}(x_1, z_1) = \max_{y \in \{y_1, y_2\}} \min(\mu_R(x_1, y), \mu_S(y, z_1))$
 $= \max(\min(0.4, 0.1), \min(0.2, 1.0)) = \max(0.1, 0.2) = \underline{\underline{0.2}}$

x₁, z₂: $\mu_{R \circ S}(x_1, z_2) = \max_{y \in \{y_1, y_2\}} \min(\mu_R(x_1, y), \mu_S(y, z_2))$
 $= \max(\min(0.4, 0.3), \min(0.2, 0.5)) = \max(0.3, 0.2) = \underline{\underline{0.3}}$

b) max-prod-Komposition: ... mit den gleichen Mengen und Zahlen

$$\mu_{R \circ S}(x, z) = \max_{y \in \{y_1, y_2\}} \text{prod}(\mu_R(x, y), \mu_S(y, z))$$

			S	z ₁	z ₂	z ₃	z ₄
			y ₁	0.1	0.3	0.8	1.0
			y ₂	1.0	0.5	0.6	0.1

R	y ₁	y ₂	R ∘ S	z ₁	z ₂	z ₃	z ₄
x ₁	0.4	0.2	x ₁	0.2	0.12	0.32	0.4
x ₂	0.9	0.5	x ₂	0.5	0.27	0.72	0.9

$$x_3 \quad \left| \begin{array}{cc} 0.1 & 1.0 \end{array} \right. \quad \left| \quad x_3 \quad \left| \begin{array}{ccc} 1.0 & 0.5 & 0.6 & 0.1 \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \underline{x_1, z_1} : \mu_{R \circ S}(x, z) &= \max_{y \in \{y_1, y_2\}} \text{prod}(\mu_R(x_1, y), \mu_S(y, z_1)) \\ &= \max(\underbrace{(0.4 \cdot 0.1)}_{= 0.04}, \underbrace{(0.2 \cdot 1.0)}_{= 0.2}) = \underline{\underline{0.2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{x_1, z_2} : \mu_{R \circ S}(x, z) &= \max_{y \in \{y_1, y_2\}} \text{prod}(\mu_R(x_1, y), \mu_S(y, z_2)) \\ &= \max(\underbrace{(0.4 \cdot 0.3)}_{= 0.12}, \underbrace{(0.2 \cdot 0.5)}_{= 0.1}) = \underline{\underline{0.12}} \end{aligned}$$

Vergleich von max-min- mit max-prod-Komposition

für alle $x, y \in [0, 1]$ gilt: $x \cdot y \leq \min(x, y)$.

Interpretation: Für die max-prod-Komposition ergeben sich niemals größere Mitgliedschaftswerte als bei der max-min-Komposition. Kann als Entscheidungshilfe für die Praxis angesehen werden.

f) Rechenregeln für die Verkettung von unscharfen Relationen R, S, T

f.1) Beh.: Assoziativgesetz: $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$

Bew.: Es sei: $R \in F(X \times Y)$, $S \in F(Y \times Z)$, $T \in F(Z \times U)$

mit Def.

$$\mu_{R \circ S}(x, z) := \sup_{y \in Y} \{\min(\mu_R(x, y), \mu_S(y, z))\} \quad \forall (x, z) \in X \times Z$$

$$(R \circ S) \circ T : \mu_{(R \circ S) \circ T}(x, u) = \sup_{z \in Z} \{\min(\mu_{R \circ S}(x, z), \mu_T(z, u))\}$$

$$\forall (x, u) \in X \times U$$

$$\mu_{(R \circ S) \circ T}(x, u) = \sup_{z \in Z} \left\{ \min \left(\sup_{y \in Y} \{\min(\mu_R(x, y), \mu_S(y, z))\}, \mu_T(z, u) \right) \right\}$$

Berechnung von $R \circ (S \circ T)$: mittels Definition $S \circ T$

$$\mu_{R \circ T}(y, u) = \sup_{z \in Z} \{\min(\mu_S(y, z), \mu_T(z, u))\} \quad \forall (y, u) \in Y \times U$$

$$\mu_{R \circ (S \circ T)}(x, u) = \sup_{y \in Y} \{\min(\mu_R(x, y), \mu_{S \circ T}(y, u))\} \quad \forall (x, u) \in X \times U$$

$$\begin{aligned}
\mu_{R \circ (S \circ T)}(x, u) &= \sup_{y \in Y} \left\{ \min(\mu_R(x, y), \underbrace{\sup_{z \in Z} \{ \min(\mu_S(y, z), \mu_T(z, u)) \}}_{\text{min von } \mu_S \text{ und } \mu_T \text{ bei max } z}) \right\} \\
&= \sup_{y \in Y} \left\{ \min(\underbrace{\sup_{z \in Z} \{ \min(\mu_S(y, z), \mu_T(z, u)) \}}_{\text{min von } \mu_S \text{ und } \mu_T \text{ bei max } z}, \mu_R(x, y)) \right\} \\
&= \sup_{z \in Z} \left\{ \min(\sup_{y \in Y} \{ \min(\underbrace{\mu_S(y, z), \mu_R(x, y)}_{= (\mu_R(x, y), \mu_S(y, z))} \text{ mit Def. } \min(a, b)) \}, \mu_T(z, u)) \right\}
\end{aligned}$$

$$\mu_{R \circ (S \circ T)}(x, u) = \mu_{(R \circ S) \circ T}(x, u)$$

Folge: $\mu_{R \circ (S \circ T)}(x, u) = \mu_{(R \circ S) \circ T}(x, u)$.

Bem.: Aus $\min(a, b) = \begin{cases} a & a \leq b \\ b & a > b \end{cases}$, folgt mittels

Vertauschung $a \rightarrow b$ und $b \rightarrow a$

$$\min(b, a) = \begin{cases} a & b \leq a \\ b & b > a \end{cases}.$$

f.2) Distributivgesetz für die Vereinigungsbildung:

$$R \circ (S \cup T) = (R \circ S) \cup (R \circ T).$$

(abgeschwächtes) Distributivgesetz für die Durchschnittsbildung:

$$R \circ (S \cap T) \subseteq (R \circ S) \cap (R \circ T).$$

f.3) Bildung von Inversen:

$$(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1},$$

$$(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1},$$

$$(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}.$$

f.4) Komplement und Inversenbildung:

$$\left(\mathbf{R}^{-1}\right)^{-1} = \mathbf{R}, \quad \left(\mathbf{R}^c\right)^{-1} = \left(\mathbf{R}^{-1}\right)^c .$$

f.5) Monotonie-Eigenschaften:

$$\mathbf{R} \subseteq \mathbf{S} \Rightarrow \mathbf{R} \circ \mathbf{T} \subseteq \mathbf{S} \circ \mathbf{T} \quad \text{und} \quad \mathbf{T} \circ \mathbf{R} \subseteq \mathbf{T} \circ \mathbf{S} .$$

3.3 Fuzzy-Inferenz

3.3.1 Erinnerung klassische Logik

klassische Logik ist eine zweiwertige Logik mit den Aussagen
 "wahr" interpretiert mit 1,
 "falsch" interpretiert mit 0.

Inferenzregel

Implikation: WENN A DANN B

Faktum: A wahr

Schluss: B wahr

Interpretation: Wenn die Regel $A \Rightarrow B$ gilt und wenn A wahr ist, dann ist B wahr und wir können A und B ersetzen (Ersetzregel, modus ponens genannt).

Fuzzy-Inferenz ist die Anwendung der Fuzzy-Relationen mit dem Ziel:

fuzzy-logisches Schließen bezüglich vager Informationen.

Schema: Fuzzy-Inferenz (auch Implikation genannt) besteht aus einer oder mehreren Regeln, einem Faktum und einem Schluss.

3.3.2 fuzzy-logisches Schließen

Wahrheitswerte existieren zwischen 0 und 1

↓

mehrwertiger Logik

Def: Die Fuzzy-Logik ist eine mehrwertige Logik, deren Verknüpfung durch mathematische Operatoren definiert ist.

a) Fuzzy-Inferenz-Regel mit **einer** Prämisse

Implikation: WENN (unscharfe Information A auf der Grundmenge G_1)

DANN (unscharfe Information B auf der Grundmenge G_2)

Faktum: Es liegt die unscharfe Information A' für ein Ereignis aus G_1 vor.

Schluss: Es gilt die unscharfe Information B' auf G_2 für das vorliegende Ereignis aus G_1

Interpretation:

$$B' \leq B$$

Die "geköpfte" Fuzzy-Menge (siehe α -Schnittmengen) am Ausgang des Fuzzy-Inferenzschemas ist enthalten in der Fuzzy-Menge der Konklusion.

oder

Die unscharfe Information B' hat keinen höheren Fuzzy-Wahrheitswert als die ursprüngliche unscharfe Information B.

Fuzzy-Implikation besteht im einfachsten Fall aus einer

WENN	-	DANN	-	REGEL
⏟		⏟		
... auch als Prämisse bezeichnet repräsentiert die Bedingung		... als Schlussfolgerung bezeichnet, auch Konklusion genannt		

Beispiel: Kennzahl Eigenkapitalrentabilität (linuistische Variable) mit den linguistischen Termen: niedrig, mittel, hoch

WENN-DANN-Regel eines Experten:

WENN die Eigenkapitalrentabilität hoch ist (UND der Verschuldungsgrad niedrig)

DANN ist die Bonität des Unternehmens gut.

Anmerkung: Bonität hat keine Dimension. Solche Größen werden als linguistische Symbole bezeichnet.

b) Fuzzy-Inferenz Regel mit mehreren Premissen

Regel: **WENN** A_1 **UND** A_2 **UND** $A_3 \dots$ **UND** A_n **DANN** B

mit $A_i : \mu_i X_i \rightarrow [0,1] \forall i = 1, 2, \dots, n$ und der Zugehörigkeitsfunktion der Konklusion $B : \mu : Y \rightarrow [0,1]$ wird beschrieben durch die $(n+1)$ -stellige Relation

$$R : X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \times Y [0,1]$$

Dann ist das Fuzzy-Inferenzschema für das aktuelle Ereignis $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ mit den scharfen Werten x'_1, x'_2, \dots, x'_n der Kenngrößen X_i , $i = 1, 2, \dots, n$ und $y \in Y$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \mu_{B'}(y) &= \mu_R(x'_1, x'_2, \dots, x'_n, y) \\ &= \min(\mu_1(x'_1), \mu_2(x'_2), \dots, \mu_n(x'_n), \mu_B(y)) \end{aligned}$$

Anmerkung: Die Größe $\min(\mu_1(x'_1), \mu_2(x'_2), \dots, \mu_n(x'_n))$ heißt Erfüllungsgrad der Regel.
Die Größe $\{\mu_1(x'_1), \mu_2(x'_2), \dots, \mu_n(x'_n)\}$ repräsentieren die fuzzy-wertige Eingangsgrößen.

c) Mehrere Fuzzy-Inferenz-Regeln mit mehreren Prämissen: Regelbasis (/Kah/)

Regel 1:

WENN $x_1 = A_{11} \dots$ UND $x_i = A_{1i} \dots$ UND $x_n = A_{1n}$ DANN $y = B_1$

⋮

Regel j:

WENN $x_1 = A_{j1} \dots$ UND $x_i = A_{ji} \dots$ UND $x_n = A_{jn}$ DANN $y = B_j$

⋮

Regel m:

WENN $x_1 = A_{m1} \dots$ UND $x_i = A_{mi} \dots$ UND $x_n = A_{mn}$ DANN $y = B_m$

Erklärung:

Eingangsgrößen: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$

linguistische Terme der Eingangsgröße x_i : $A_{1i}, A_{2i}, \dots, A_{mi}$

Ausgangsgröße: y

linguistische Terme der Ausgangsgröße: B_1, B_2, \dots, B_m

Interpretation:

$x_i = A_{ji}$ bedeutet: "Wenn die Eingangsgröße x_i die Eigenschaft A_{ji} hat".

4. Analyse und Design von Fuzzy-Systemen

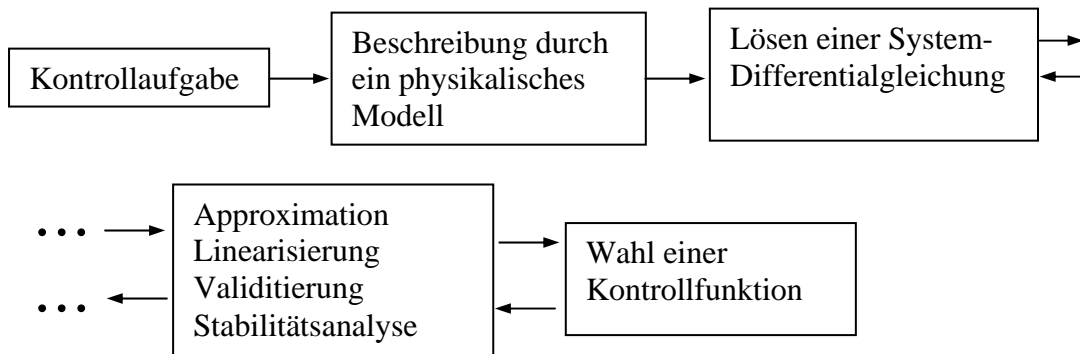
4.1 Grundidee bei Fuzzy-Systemen

Mit Hilfe des Fuzzy-Konzepts ergibt sich die Möglichkeit, empirisches Prozesswissen und beschreibbare Steuerungsstrategien für die Prozessautomatisierung zu nutzen. Dabei kommt der Kontrollfunktion und der Stabilität des Systems besondere Bedeutung zu.

Zwei Paradigmen können zu einer Kontrollfunktion führen:

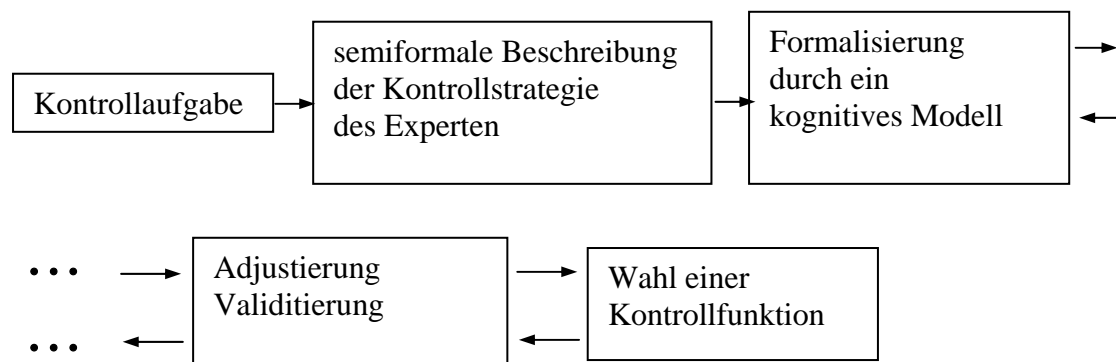
Die klassische Methode, wobei ein Lösen der entsprechenden Gleichungen im Mittelpunkt steht oder die kognitive Methode.

a) Klassische Methode



b) Kognitive Methode

Bei dieser Methode erstellt man ein Modell nach den Vorgaben des Experten, nicht des physikalischen Prozesses.



Komplexe Systeme können einfacher beschrieben werden, indem ein kalkulierbarer Anteil von unpräzise, vagen und unsicherem Wissen in die Modellierung einbezogen wird. Komplizierte mathematische Zusammenhänge können beispielsweise

ohne Benutzung der entsprechenden linearen oder nichtlinearen Differentialgleichungen durch eine geeignete linguistische Beschreibung ersetzt werden. Das durch die linguistische Beschreibung approximierte Modell wird anhand von Gütekriterien wie Korrektheit, Vollständigkeit, Adäquatheit, Effizienz und Benutzerfreundlichkeit beurteilt.

Die Behandlung von linguistischen Variablen ist nicht neu, sie ist uns aus dem Bereich der Expertensysteme, speziell bei der Formulierung von Produktionsregeln, bekannt. In Verbindung mit der Fuzzy-Logik erwuchs die Vorstellung einer Anwendung im Bereich der Regelungstechnik und Kontrolltheorie, insbesondere wenn es sich um Nichtlinearitäten im Prozessgeschehen handelt (Fig. 4.1). Quantisierung der Kurve: Wenn x Element aus X_j , dann sei y ein Element aus Y_j . Mit Hilfe der Fuzzy-Logik, lässt sich dieses Konzept erweitern, indem zur Festlegung von X_j und Y_j auch Fuzzy-Mengen zugelassen werden.

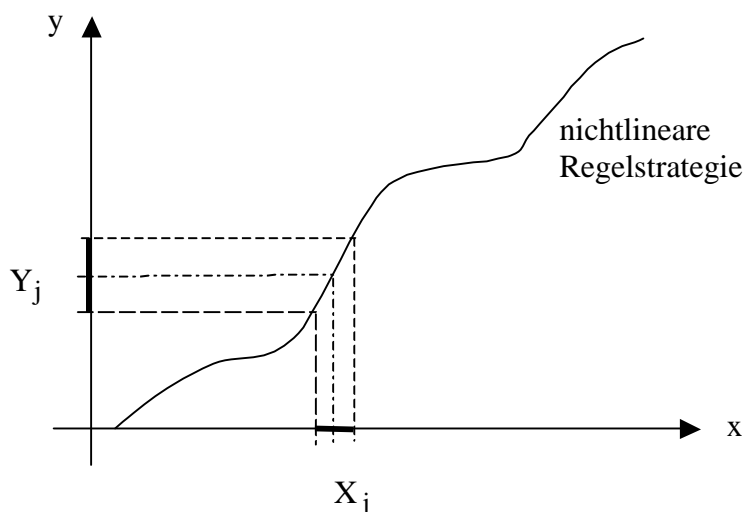


Fig. 4.1: Beschreibung einer nichtlinearen Funktion (Regelstrategie) durch bereichsweise Definition des Kurvenverlaufs (/Bon/). Beispielsweise entspricht dabei einem elementaren Kurvenstück einer umgangssprachlich formulierten Regel: "Wenn die Temperatur absinkt, dann erhöhe den Druck".

Die gesamte Regelstrategie lässt sich in Teilstrategien aufteilen in der folgenden Form:

$$R_j : \text{IF } x \text{ IS } X_i \text{ THEN } y \text{ IS } Y_j .$$

Die Mathematisierung von linguistischem Wissen bzw. Darstellung von vagem Wissen vollziehen wir über Funktionsgra-

phen. Dabei ordnen wir der Aussage wahr den Wert 1 einer Zugehörigkeitsfunktion und der Aussage falsch den Wert 0 zu.

4.2 Methoden des Fuzzy Control

Klassisch betrachtet ist ein Regler ein System, das gemessene Eingangsgrößen mit Präferenzwerten vergleicht und einen Ausgangswert oder Ausgangswerte erzeugt, die einen Prozess regeln.

Eine Fuzzy-Regelung lässt sich einfach beschreiben:

- Keine exakte mathematische Formulierung des Systems ist notwendig.
- Linguistische Variable (Terme) und Schlussfolgerungen werden benutzt um vage oder unexakte Aussagen zu charakterisieren. Ein Problem dabei stellt die Stabilität des Systems dar. Zur Überprüfung der Stabilität eines Fuzzy-Systems können verschiedene Methoden benutzt werden:
- unbiasedness criterion (/Sug2/),
- gewichteter recursive least squares algorithm (/Sug3/),
- Methode von Tanaka (/Tan/) durch eine Input-Output-Datenanalyse,
- Lyapunov-Methode (siehe z.B. /Tak/), etc.

Für die Fuzzy-Regelung existieren verschiedene Entwicklungslinien z.B.:

- Methode von Mamdani mit Entscheidungsmodul und Defuzzifizierungsmodul,
- Methode von Sugeno mit scharfem Wert aus dem Entscheidungsmodul,
- Sliding Mode Fuzzy Control von Palm (/Pl-6/),
- Predictive Fuzzy Control von Yamaguchi (/Yam/).

4.2.1 Methode von Mamdani

Ein Fuzzy-Regelsystem besteht aus zwei wesentlichen Teilen, nämlich dem sogenannten Fuzzy-Regler und dem zu regelnden Prozess (Fig. 4.1).

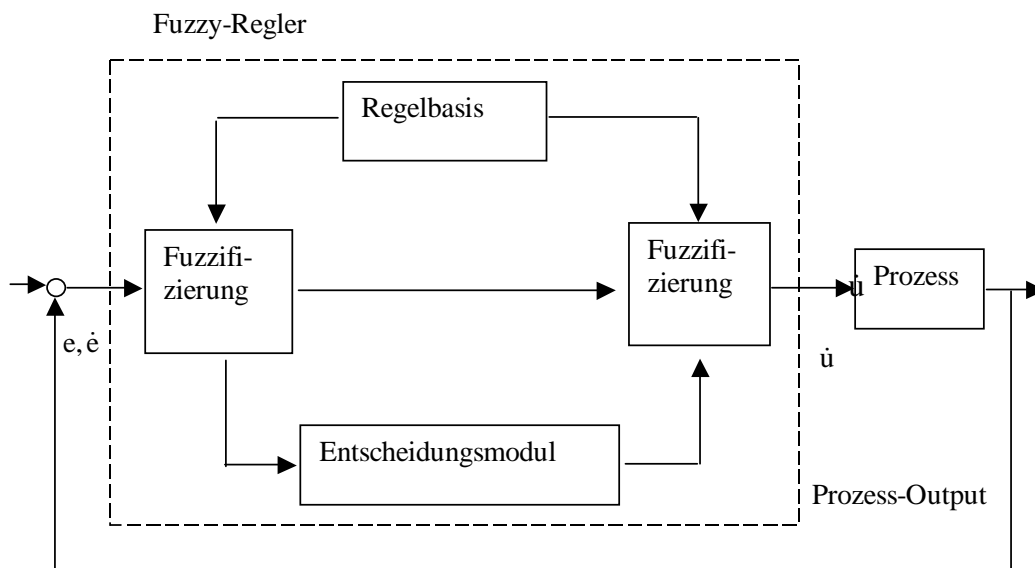


Fig. 4.2: Schematische Darstellung eines Fuzzy-Regelsystems (/He1/).

Die Entwurfsschritte für einen fuzzygeregelten Prozess sind gekennzeichnet durch:

- Aufstellung einer Regelbasis
- Fuzzifizierungsalgorithmus
- Entscheidungsmodul
- Defuzzifizierungsprozess um einen scharfen Wert für die Stellgröße zu erhalten.

(i) **Aufstellung einer Regelbasis** in der Form, z.B. für die i -te Regel

$$R^i : \text{IF } e \text{ IS } E \text{ AND } \dot{e} \text{ IS } \Delta E \text{ THEN } \dot{u} \text{ IS } \Delta U$$

Hierbei charakterisiert e den Fehler, \dot{e} die Änderung des Fehlers und \dot{u} die Änderung des Ausgabewertes (nicht fuzzywertig), alle Größen seien definiert auf ihren jeweiligen Definitionsbereichen E , ΔE und ΔU , der gesamte Definitionsbereich ist das kartesische Produkt $E \times \Delta E \times \Delta U$. Über diesem Definitionsbereich werden die Begriffe Fehler und Fehleränderung fuzzifiziert, d.h. mittels unscharfer Mengen dargestellt, wobei die linguistische Beschreibung z.B. NB (negativ big), NM (negativ medium), NS (negativ small) Z0 (approximately zero), PS (positiv small), PM (positiv medium), PB (positiv big) für jede zu fuzzifizierende Größe verwendet wird. Vergleicht man den Eingabewert e und \dot{e} mit den Voraussetzungen, so erhält man Aussagen darüber welche Regeln feuern.

(ii) Fuzzifizierungsalgorithmus

Im Allgemeinen ist der Fehler e und dessen Änderung \dot{e} nicht fuzzywertig, sie werden über eine linguistische Beschreibung fuzzifiziert. Die Fuzzy-Werte werden mit den Prämissen der If-Then-Regeln aus der Regelbasis verglichen. Aus der Regelbasis folgt, welche Regeln feuern können und mit welchem Gewicht eine Regel beteiligt ist.

(iii) Verknüpfungsmodul

Die aktivierten Regeln mit ihrem unterschiedlichen Gewicht werden mit Hilfe einer Verknüpfungsoperation zusammengefasst und dem Defuzzifizierungsalgorithmus zugeführt.

(iv) Defuzzifizierung

Mit Hilfe einer Defuzzifizierungsoperation wird aus der Menge der möglichen Werte eine nicht fuzzywertige Größe, d.h. eine scharfe Größe, ermittelt.

Diese Größe ist zu interpretieren als Stellgröße, d.h. wie eine Einstellung des Systems vorzunehmen ist, so dass die Regelabweichung gering wird. Fuzzy-Regelung bedeutet, dass die Schritte (i) bis (iv) wiederholt werden, bis das Ziel, geringste Fehlerabweichung e und Änderung \dot{e} ($= de/dt$), erreicht wird.

(v) Defuzzifizierungsmethoden

- **Maximum-Kriterium-Methode**

Es wird ein beliebiger Wert $\eta \in Y$ ausgewählt, und zwar aus dem Bereich innerhalb dessen die Fuzzy-Menge $\mu_{x_1, \dots, x_n}^{\text{Output}}$ maximalen Zugehörigkeitsgrad besitzt.

Nachteil: Es ist nicht bekannt welcher Wert mit maximalem Zugehörigkeitsgrad zu wählen ist. Ein Intervall repräsentiert eine Klasse von Defuzzifizierungsstrategien. Wird ein Wert zufällig aus dem Intervall gewählt, handelt es sich um eine nicht-deterministische Vorgabe, so dass beispielsweise ein Regler sprunghaftes Verhalten zeigen kann.

- **Mean-of-Maximum-Methode (MOM)**

Als Stellwert wird der Mittelwert über die maximalen Zugehörigkeitswerte genommen. D.h. die Menge Y ist ein Intervall, sie sei nicht leer und charakterisiert durch:

$$\text{SUP}(\mu_{x_1, \dots, x_n}^{\text{Output}}) := \left\{ y \in Y \mid \mu_{x_1, \dots, x_n}(y) \geq \mu_{x_1, \dots, x_n}(y^*) \forall y^* \in Y \right\}$$

Damit folgt:

$$\eta_{\text{MOM}} = \frac{1}{\int_{y \in \text{SUP}(\mu_{x_1, \dots, x_n}^{\text{Output}})} dy} \cdot \int_{y \in \text{SUP}(\mu_{x_1, \dots, x_n}^{\text{Output}})} y dy.$$

- **Center of Gravity (COG)**

Diese Methode ist als Schwerpunktmethode bekannt, es wird der Flächenschwerpunkt mit gedachter homogener Dichtebelegung vom Werte eins berechnet:

$$\eta_{\text{COG}} = \frac{1}{\int_{y_{\text{inf}}}^{y_{\text{sup}}} \mu(y) dy} \cdot \int_{y_{\text{inf}}}^{y_{\text{sup}}} \mu(y) y dy.$$

- **Center of Area (COA)**

Es wird die Position einer Achse parallel zur Ordinate berechnet, so dass die linke und die rechte Seite der Fläche unter der Zugehörigkeitsfunktion gleich wird:

$$\int_{y_{\text{inf}}}^{\eta} \mu(y) dy = \int_{\eta}^{y_{\text{sup}}} \mu(y) dy.$$

- **Basic Defuzzification Distribution (BADD)**

Dabei handelt es sich um eine parametrische Methode, (/Fi/, /Ya1-5/), mit γ als einem Parameter ($\gamma \in \mathbb{R}$):

$$\eta_{\text{BADD}} = \frac{1}{\int_{y_{\text{inf}}}^{y_{\text{sup}}} \mu(y)^\gamma dy} \cdot \int_{y_{\text{inf}}}^{y_{\text{sup}}} \mu(y)^\gamma y dy.$$

ferner gilt:

$$\begin{aligned} \eta_{\text{COG}} &= \eta_{\text{BADD}}, \gamma = 1, \\ \eta_{\text{MOM}} &= \eta_{\text{BADD}}, \gamma \rightarrow 0. \end{aligned}$$

- **Extended Center of Area (XCOA):**

$$\eta_{\text{XCOA}} = \frac{\int_{y_{\text{inf}}}^{y_{\text{sup}}} \mu(y)^\gamma dy}{\int_{y_{\text{inf}}}^{y_{\text{sup}}} \mu(y)^\gamma dy}$$

- **Center of Largest Area (CLA)**

Bei dieser Methode (/Pf/, /Ki1/) wird die signifikante Teilmenge aus der Gesamtmenge ausgewählt, die dann mit bekannten Methoden, wie z.B. der Schwerpunktmethode (COG) oder der Bestimmung des Flächenzentrums (COA) ausgewertet wird.

- **Customizable Basic Defuzzification Distribution (CBADD)**

Wird der Exponent γ bei der parametrischen Defuzzifizierungsmethode als eine Funktion von y angesehen, dann folgt unmittelbar

$$\eta_{\text{CBADD}} = \frac{\int_{y_{\text{inf}}}^{y_{\text{sup}}} \mu(y)^{\gamma(y)} y dy}{\int_{y_{\text{inf}}}^{y_{\text{sup}}} \mu(y)^{\gamma(y)} dy}$$

Die CBADD-Methode kann als eine Verallgemeinerung der BADD-Methode interpretiert werden. Sie ist insbesondere dann interessant, wenn $\mu(y)$ selbst besonders gewichtet werden soll.

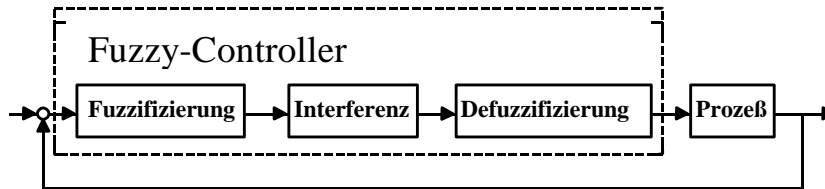
- **Modified Semi Linear Defuzzification (MSLIDE)**

MSLIDE ist eine parametrische Defuzzifikationsmethode proportional zu den Methoden COG und MOM als Spezialfälle:

$$\eta_{\text{MSLIDE}} := (1 - \beta) \cdot \eta_{\text{COG}} + \beta \cdot \eta_{\text{MOM}} \quad \text{mit} \quad 0 \leq \beta \leq 1.$$

Beispiel: Inverses Pendel

Methodik einer Fuzzy-Regelung am Beispiel eines aufrechtstehenden Pendels. Grundstruktur eines Fuzzy-Controllers:



Fuzzy-Regelung eines aufrechtstehenden Pendels (Mamdani-Regelungskonzept)

Es wird das Modell eines menschlichen "Kontrollexperten" (kognitive Aufgabe) zugrunde gelegt. Dabei formuliert der Experte sein Wissen in Form von linguistischen Regeln.

⇒ Expertenbefragung ist notwendig,

⇒ Beobachtung des Expertenverhaltens.

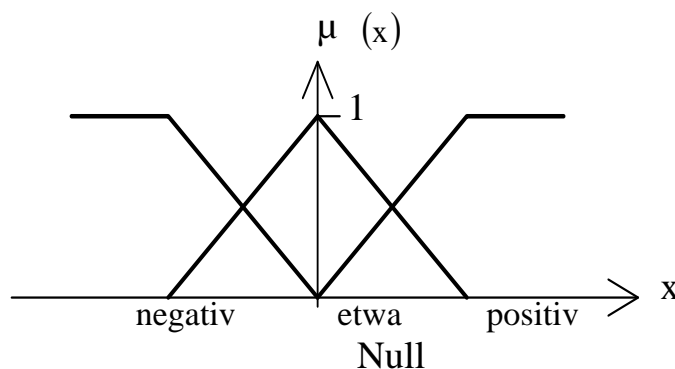
Linguistische Regeln bestehen im allgemeinen aus einer

- Prämisse (Spezifikation der Werte für die Messgrößen),
- Konklusion (die einen geeigneten Stellwert angibt).

Folge: Für jede der Wertemengen X_1, X_2, \dots, X_n (für die Messgrößen) und Y (für die Stellgröße) sind geeignete linguistische Terme wie ungefähr Null, positiv klein etc. festzulegen. Dabei kann ungefähr Null bezogen auf die Messgröße ξ_1 durchaus etwas anderes bedeuten als für die Messgröße ξ_2 .

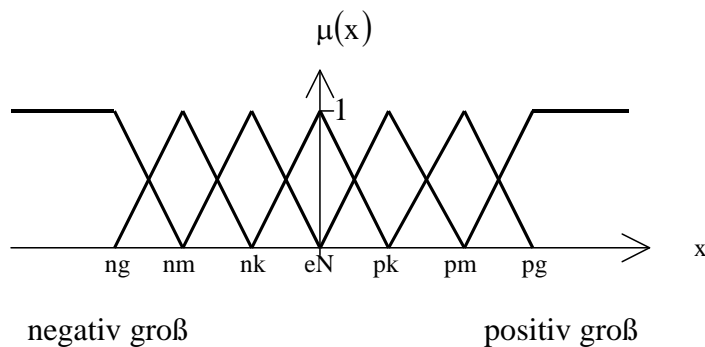
Für die Menge X_1 könnten wir drei linguistische Terme negativ, etwa Null und positiv verwenden. Für die mathematische Modellierung muss dann jedem dieser drei linguistischen Terme eine Fuzzy-Menge zugeordnet werden (siehe unten).

grobe Partitionierung:

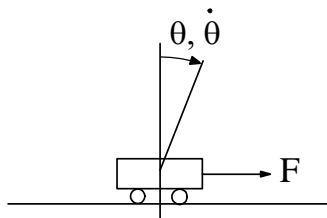


Bem.: Aufgrund der Dynamik des Systems muss eine feinere Unterteilung in linguistische Terme vorgenommen werden.

feinere Partitionierung:



Physikalisches Modell für die Regelaufgabe



Wertebereich:

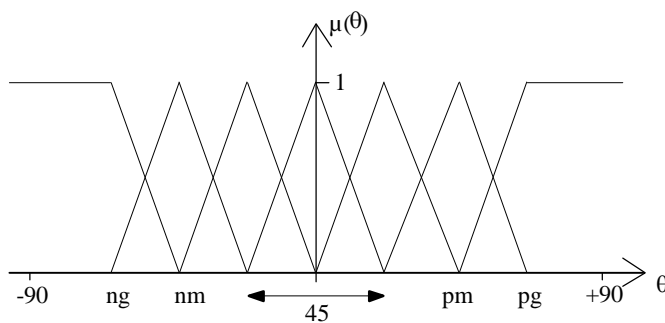
Winkelwerte ($- 90^\circ < \theta < 90^\circ$): $X_1 := [- 90^\circ, 90^\circ]$

Winkelgeschwindigkeitswerte ($- 45^\circ \cdot s^{-1} \leq \dot{\theta} \leq 45^\circ \cdot s^{-1}$):

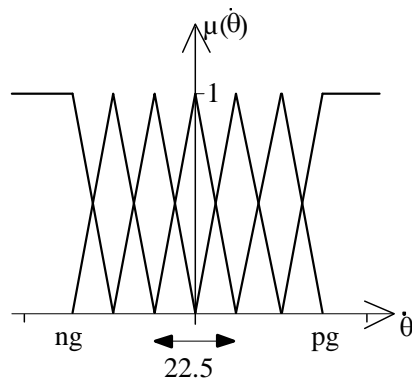
$$X_2 := [- 45^\circ, 45^\circ]$$

Kraftwerte ($- 10N \leq F \leq 10N$): $Y := [- 10, 10]$

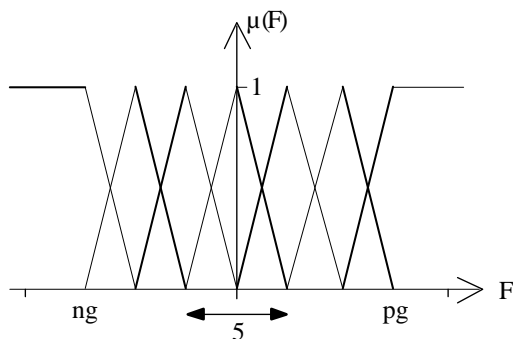
Partitionierung: ... für Menge X_1



Partitionierung: ... für Menge X_2



Partitionierung: ... für Menge Y



Regelbasis:

	ng	nm	nk	eN	pk	pm	pg
ng			pk	pg			
nm				pm			
nk	nm		nk	pk			
eN	ng	nm	nk	eN	pk	pm	pg
pk				nk	pk		pm
pm				nm			
pg				ng	nk		

Regelbasis enthält 19 Regeln.

aktuelle Messwerte: mögliche Startwerte.

Winkel $\theta = 36^\circ$.

Winkelgeschwindigkeit $\dot{\theta} = - 2,25^\circ \cdot s^{-1}$

Regelauswahl aus den 19:

R1: Ist θ positiv klein (pk) und $\dot{\theta}$ ist etwa Null (eN) dann ist F positiv klein (pk).

R2: Ist θ positiv mittel (pm) und $\dot{\theta}$ ist etwa Null (eN) dann ist F positiv mittel (pm).

Für R_1 ist die Prämisse zu $\min\{0,4; 0,8\} = 0,4$ erfüllt, genauer:

$$\alpha = \min\{\mu^{(1)}(\theta); \mu^{(1)}(\dot{\theta})\} = \{0,4; 0,8\} = 0,4.$$

Folge:

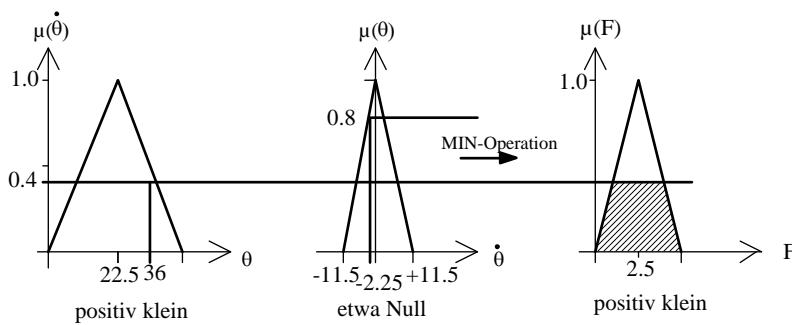
$$\mu_{36;-2,25}^{\text{Output}(R_1)}(y) = \begin{cases} \frac{2}{5} \cdot y & \text{für } 0 \leq y \leq 1 \\ 0,4 & \text{für } 1 \leq y \leq 4 \\ 2 - \frac{2}{5}y & \text{für } 4 \leq y \leq 5 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Für Regel R_2 : $\min\{0,6; 0,8\} = 0,6$ für den Erfüllungsgrad der Prämisse.

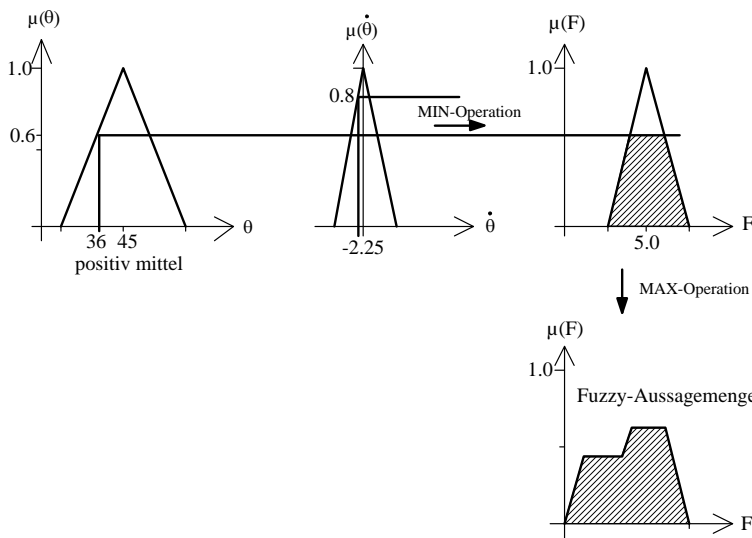
genauer: $\alpha = \min\{\mu^{(2)}(\theta); \mu^{(2)}(\dot{\theta})\}$

Praktisches Vorgehen:

Auswertung der Regel R_1



Auswertung der Regel R_2



$$\mu_{36; - 2,25}^{\text{Output}(R_2)}(y) = \begin{cases} \frac{2}{5}y - 1 & \text{für } 2,5 \leq y \leq 4 \\ 0,6 & \text{für } 4 \leq y \leq 6 \\ 3 - \frac{2}{5} \cdot y & \text{für } 6 \leq y \leq 7,5 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Für alle anderen 17 Regeln ergibt sich ein Erfüllungsgrad Null für die Prämisse, sie liefern also die Fuzzy-Menge die konstant Null sind.

Auswertung der beiden Regeln (Entscheidungslogik)

Vorgehen:

1.) Auswertung der erhaltenen Fuzzy-Mengen, die mit Maximumbildung (Vereinigung) zusammengefügt werden Die Entscheidungslogik liefert:

$$\mu_{x_1, \dots, x_n}^{\text{Output}} : Y \rightarrow [0,1]; y \rightarrow \max_{r \in \{1, \dots, k\}} \left\{ \min \left\{ \mu_{1,r}^{(1)}(x_1), \dots, \mu_{1,r}^{(n)}(x_n), \mu_{1,r}(y) \right\} \right\}$$

2.) Fuzzy-Menge nach Maximumsbildung

$$\mu_{36; - 2,25}^{\text{Output}}(y) = \begin{cases} \frac{2}{5} \cdot y & \text{für } 0 \leq y \leq 1 \\ 0,4 & \text{für } 1 \leq y \leq 3,5 \\ \frac{2}{5}y - 1 & \text{für } 3,5 \leq y \leq 4 \\ 0,6 & \text{für } 4 \leq y \leq 6 \\ 3 - \frac{2}{5}y & \text{für } 6 \leq y \leq 7,5 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

3.) Die weiteren Regeln liefern keinen Beitrag, da die Fuzzy-Mengen selbst Null sind.

4.) Defuzzifizierung

Entscheidungslogik liefert keinen "scharfen" Wert für den Stellwert, sondern eine Fuzzy-Menge. D.h.: Mit der Methode erhält man eine Abbildung, die jedem Tupel $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ von Messwerten eine FUZZY-Menge nämlich

$$\mu_{x_1, \dots, x_n}^{\text{Output}}$$

von Y zuordnet. Defuzzifizierung bedeutet, dass ein Stellenwert berechnet werden muss.

Schwerpunktmethode liefert: $F = 3,95$.

Maximum-Kriterium-Methode liefert: $F = 5,0$ als Stellgröße.

Allgemeines Vorgehen: ... "Trajektorie" soll so verlaufen, dass Endpunkt im Zentrum liegt.

Welche Regeln gehören zum Defuzzifizierungs-Output?

- i) Durch Defuzzifizierungs-Output wird ein Iterationsprozess eingeleitet der letztlich in die Mitte der Regelfläche führt, d.h. Stellgröße = 0 liefert.
- ii) Stabilitätsuntersuchung sind durchzuführen.
- iii) Fuzzy Control
 - Wissensbasierte Definition eines Kennfeldes. Was heißt das?
 - Design Parameter
 - Wahl der Fuzzy Mengen
 - Partitionen
 - Art der Schlussfolgerung
 - Defuzzifizierung
 - Struktursatz: Jedes (nichtlineare) Kennfeld kann durch Wahl dieser Parameter beliebig genau approximiert werden.

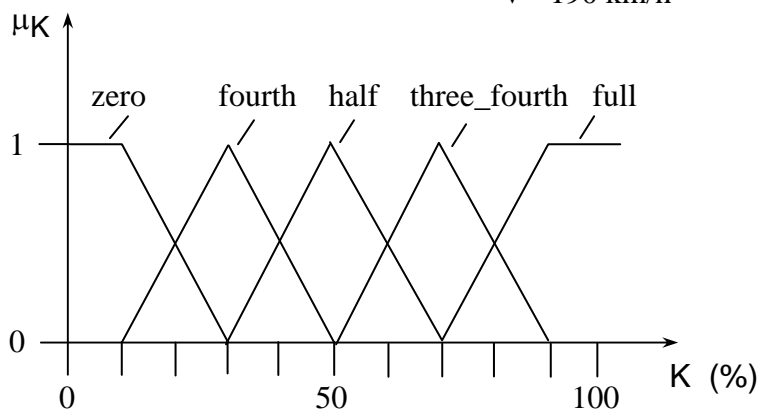
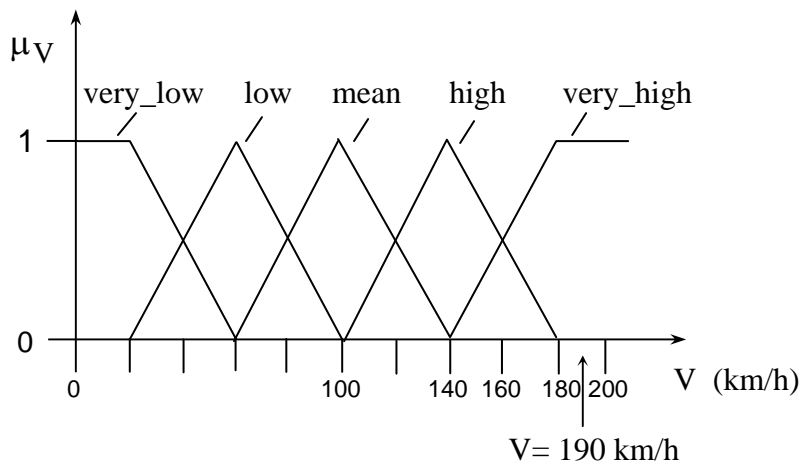
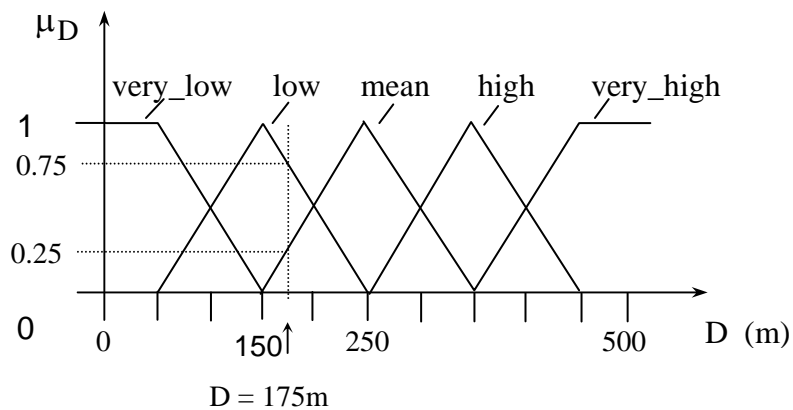
Mamdani Controller ist vom Sugeno Controller zu unterscheiden.

Bemerkungen zum Mamdani-Konzept

Es handelt sich hierbei um einen ad-hoc-Ansatz für eine Fuzzy-Regelung. Der Experte formuliert sein Wissen in Form von linguistischen Regeln. Die Messgrößen bzw. Eingangsgrößen als auch die Ausgangsgröße sind entsprechend mit geeigneten Zugehörigkeitsfunktionen darzustellen. Mit Hilfe der aufgestellten Regeln, zusammengestellt in einer Regelbasis, und Verknüpfungen der Eingangsgrößen über geeignete Operatoren (beispielsweise Minimum-Operator) lässt sich eine Fuzzy-Menge für die Ausgangsgröße erzeugen. Mit Hilfe von Defuzzifizierungsverfahren ist es möglich einen Wert für die Stellgröße zu ermitteln. Von Fall zu Fall muss entschieden werden wie viel Regeln berücksichtigt werden müssen.

Aufgabe: Brake Test

Brake test: Calculate the brake effort (output quantity) with the help of a simple fuzzy system. The system consist of two cars with a certain distance D between the first and second car. We are sitting in the second car and drive with a velocity V alone a superhighway. We have at the moment a value for the distance $D = 175$ m and a velocity of $V = 190$ km/h. Calculate the brake effort K in percent ($/Kah/$) under consideration of the following linguistic terms



and the following rules

Rule 1: IF D is mean AND V is very_high THEN K = three_fourth

Rule 2: IF D is low AND V is very_high THEN K = full .

Take into account the input value

$$D = 175 \text{ m and}$$

$$V = 190 \text{ km/h .}$$

Take the min-operation for the aggregation of the two rules R1 and R2 and the max-operation for the resulting fuzzy set in the output. Make a representation of the output fuzzy set.

With the help of the defuzzification procedure COG “Center of Gravity”, please calculate the output value.

Solution:

value $\mu_D(175)$ at linguistic term mean:

$$(x_1, y_1) = (150, 0)$$

$$(x_2, y_2) = (250, 1)$$

calculation of the cross point with $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$$\frac{y - 0}{x - 150} = \frac{1 - 0}{250 - 150} \Rightarrow y = 1 \cdot \frac{x - 150}{250 - 150} = \frac{x - 150}{100}$$

$$y = \frac{x}{100} - \frac{150}{100} = \frac{x}{100} - \frac{3}{2}$$

$$y = \frac{x}{100} - \frac{3}{2}$$

$$D = x = 175: \quad \mu_{D, \text{mean}}(x) = \frac{175}{100} - \frac{3}{2} = \frac{7}{4} - \frac{6}{4} = \frac{1}{4} = 0.25$$

value $\mu_D(175)$ at linguistic term low:

$$(x_1, y_1) = (150, 1)$$

$$(x_2, y_2) = (250, 0)$$

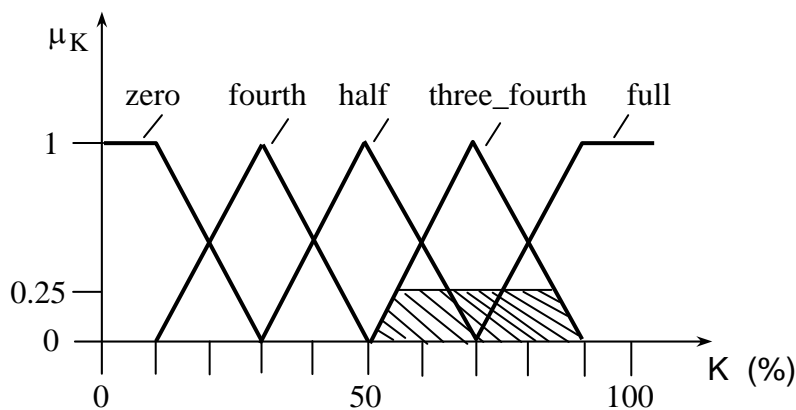
$$\frac{y-1}{x-150} = \frac{0-1}{250-150} \Rightarrow y-1 = -1 \cdot \frac{x-150}{250-150} = -\frac{x-150}{100} = -\frac{x}{100} + \frac{150}{100}$$

$$y = -\frac{x}{100} + \frac{3}{2} + 1$$

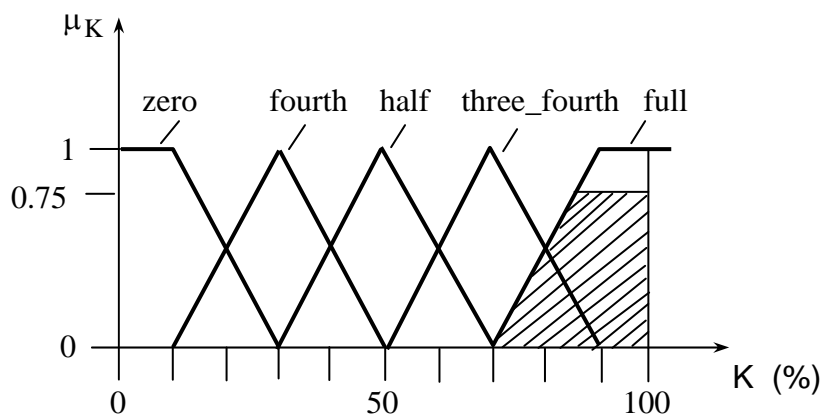
$$D = x = 175: \quad \mu_{D, \text{low}}(x) = -\frac{175}{100} + \frac{3}{2} + 1 = -\frac{7}{4} + \frac{6}{4} + \frac{4}{4} = \frac{3}{4} = 0.75$$

min-operation for the aggregation of the rule 1 and rule 2:

$$\mu_{K1} = \min(\mu_{D, \text{mean}}(x), \mu_{V, \text{very_high}}(x)) = (0.25, 1.0) = 0.25$$

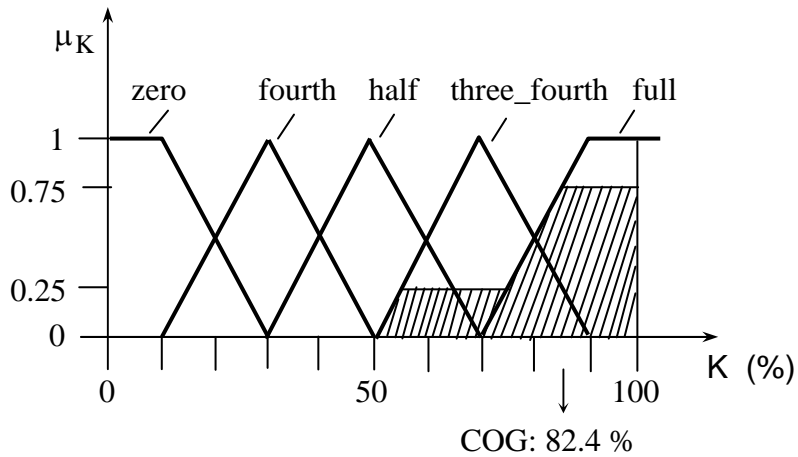


$$\mu_{K2} = \min(\mu_{D, \text{low}}(x), \mu_{V, \text{very_high}}(x)) = (0.75, 1.0) = 0.75$$



representation of max-operation for the resulting fuzzy sets in the output

$$\mu_K = \max(\mu_{K1}, \mu_{K2})$$



calculation of the functions f_1, f_2, f_3 and f_4

$$\text{range: } \underbrace{50 \leq K \leq 55}_{=x} \quad \begin{aligned} (x_1, y_1) &= (50, 0.0) \\ (x_2, y_2) &= (55, 0.25) \end{aligned}$$

$$\frac{y-0}{x-50} = \frac{0.25-0.0}{55-50} \Rightarrow y = \frac{0.25}{5}(x-50) = 0.05x - 2.5$$

$$f_1(x) = 0.05x - 2.5$$

$$\text{range: } \underbrace{55 \leq K \leq 75}_{=x} \quad f_2(x) = 0.25$$

$$\text{range: } \underbrace{75 \leq K \leq 85}_{=x} \quad \begin{aligned} (x_1, y_1) &= (70, 0.0) \\ (x_2, y_2) &= (85, 0.75) \end{aligned}$$

$$\frac{y-0.0}{x-70} = \frac{0.75-0.0}{85-70} \Rightarrow y = \frac{0.75}{15}(x-70) = 0.05x - 3.5$$

$$f_3(x) = 0.05x - 3.5$$

$$\text{range: } \underbrace{85 \leq K \leq 100}_{=x} \quad f_4(x) = 0.75$$

Integral domain

$$\begin{aligned} \underbrace{f_1(x)}_{=0.25} &= 0.05x - 2.5 \Rightarrow 0.25 = 0.05x - 2.5 \\ &25 = 5x - 250 \Rightarrow 5x = 275 \\ &x = 55 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underbrace{f_3(x)}_{=0.25} &= 0.05x - 3.5 \Rightarrow 0.25 = 0.05x - 3.5 \\ & 25 = 5x - 350 \Rightarrow 5x = 375 \\ & x = 75 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underbrace{f_3(x)}_{=0.75} &= 0.05x - 3.5 \Rightarrow 0.75 = 0.05x - 3.5 \\ & 75 = 5x - 350 \Rightarrow 5x = 425 \\ & x = 85 \end{aligned}$$

Defuzzification by the method COG (Center of Gravity):

$$x_{\text{COG}} = \frac{\sum_i M_i}{A} = \frac{M}{A}$$

$$\begin{aligned} A &= \int_{x_1}^{x_2} f_1(x) dx + \int_{x_2}^{x_3} f_2(x) dx + \int_{x_3}^{x_4} f_3(x) dx + \int_{x_4}^{x_5} f_4(x) dx \\ &= \int_{50}^{55} (0.05x - 2.5) dx + \int_{55}^{75} 0.25 dx + \int_{75}^{85} (0.05x - 3.5) dx + \int_{85}^{100} 0.75 dx \\ &= \left[0.05 \frac{x^2}{2} - 2.5x \right]_{50}^{55} + 0.25 \cdot x \Big|_{55}^{75} + \left[0.05 \frac{x^2}{2} - 3.5x \right]_{75}^{85} + 0.75 \cdot x \Big|_{85}^{100} \end{aligned}$$

$$\underline{A = 21.875}$$

$$\begin{aligned} M &= \int_{x_1}^{x_2} x \cdot f_1(x) dx + \int_{x_2}^{x_3} x \cdot f_2(x) dx + \int_{x_3}^{x_4} x \cdot f_3(x) dx + \int_{x_4}^{x_5} x \cdot f_4(x) dx \\ &= \int_{50}^{55} (0.05x^2 - 2.5x) dx + \int_{55}^{75} 0.25x dx + \int_{75}^{85} (0.05x^2 - 3.5x) dx + \int_{85}^{100} 0.75x dx \\ M &= \left[0.05 \frac{x^3}{3} - 2.5 \cdot \frac{x^2}{2} \right]_{50}^{55} + 0.25 \frac{x^2}{2} \Big|_{55}^{75} + \left[0.05 \frac{x^3}{3} - 3.5 \frac{x^2}{2} \right]_{75}^{85} + 0.75 \frac{x^2}{2} \Big|_{85}^{100} \end{aligned}$$

$$\underline{M = 1803.125}$$

$$x_{\text{COG}} = \frac{1803.125}{21.875} = 82.4286 \%$$

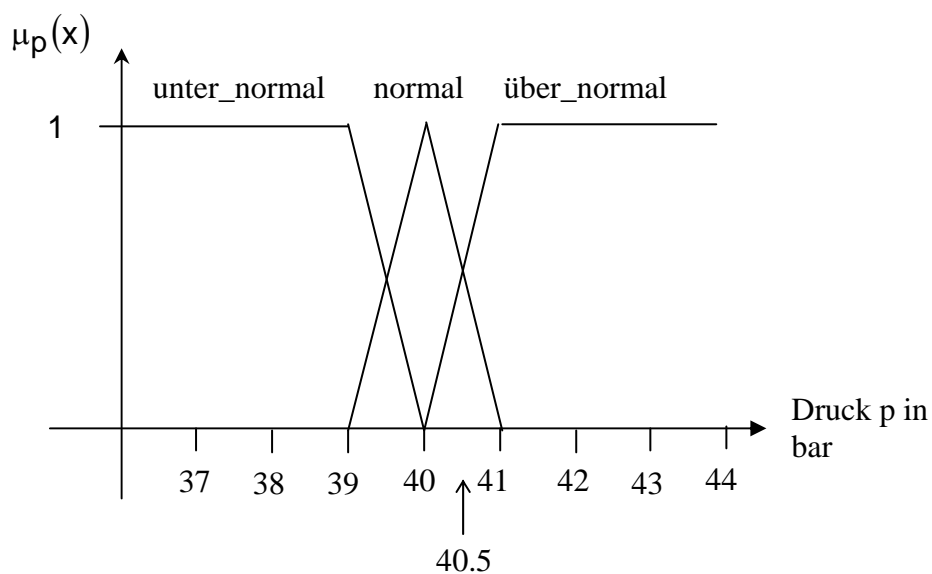
brake effort of the car: $K = 82.4 \%$

Aufgabe: Brennkammerregelung

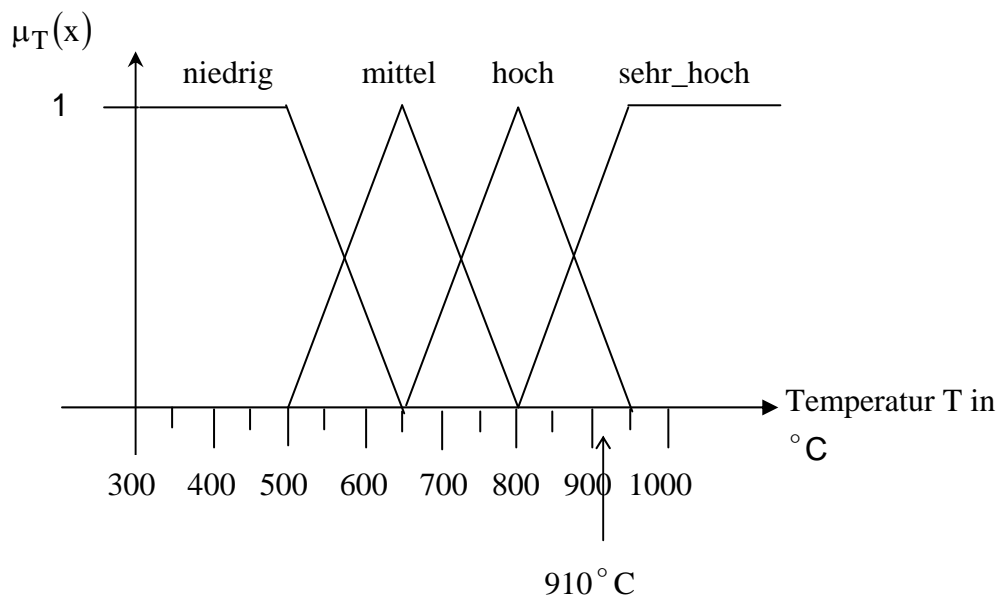
Der Experte formuliert: " Wenn die Temperatur in der Brennkammer sehr hoch ist und der Vorkammerdruck zumindest über dem Normalwert liegt, dann sollte die Methanzufuhr gedrosselt werden."

Um das Beispiel darstellen zu können, müssen zuerst die linguistischen Variablen und Terme definiert werden.

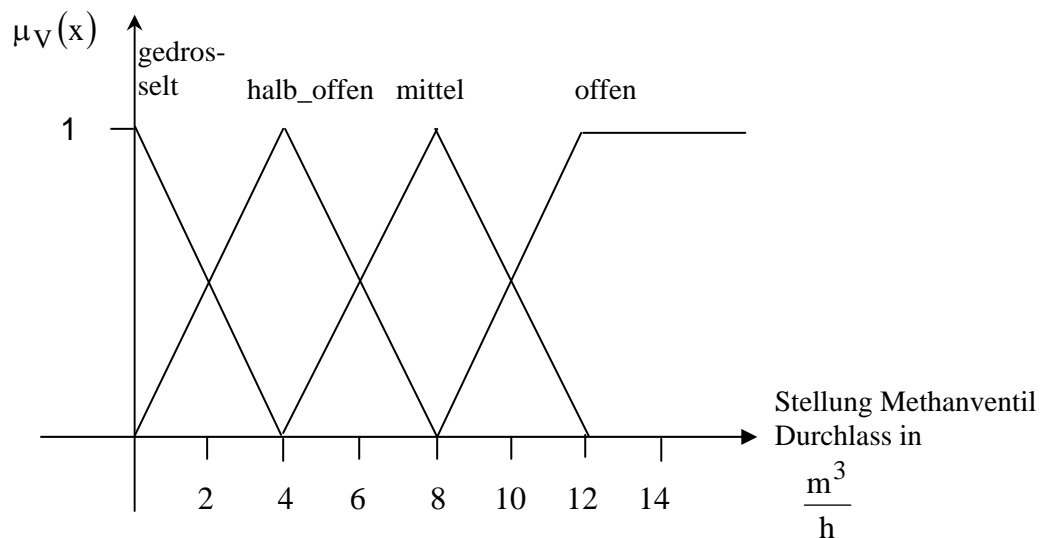
- a) Vorkammerdruck (linguistische Terme: unter_normal, normal, über_normal)



- b) Temperatur in der Brennkammer (linguistische Terme: niedrig, mittel, hoch, sehr_hoch)



c) Stellung Methanventil



Konkretisierung der Aufgabe:

Am Beispiel von zwei Regeln soll dargestellt werden, wie ein einfaches Fuzzy-System arbeitet. Zu ermitteln ist die Stellung des Methanventils bei einer Temperatur von $T = 910^{\circ}\text{C}$ und einem Vorkammerdruck von 40,5 bar. Regelbasis:

Regel 1 : WENN $T = \text{sehr_hoch}$ ODER $p = \text{über_normal}$
DANN Membranventil $V = \text{gedrosselt}$.

Regel 2 : WENN $T = \text{hoch}$ ODER $p = \text{normal}$
DANN Membranventil $V = \text{halb_offen}$.

Es ist die max-Operation für Regel 1 und die min-Operation für Regel 2 zu verwenden.

Für den Erfüllungsgrad gilt:

Temperatur $T = 910^{\circ}$	Vorkammerdruck $p = 40,5 \text{ bar}$
niedrig 0.0	unter_normal 0.0
mittel 0.0	normal 0.5
hoch 0.28	über_normal 0.5
sehr_hoch 0.72	

Lösung:

Auswertung der Regeln:

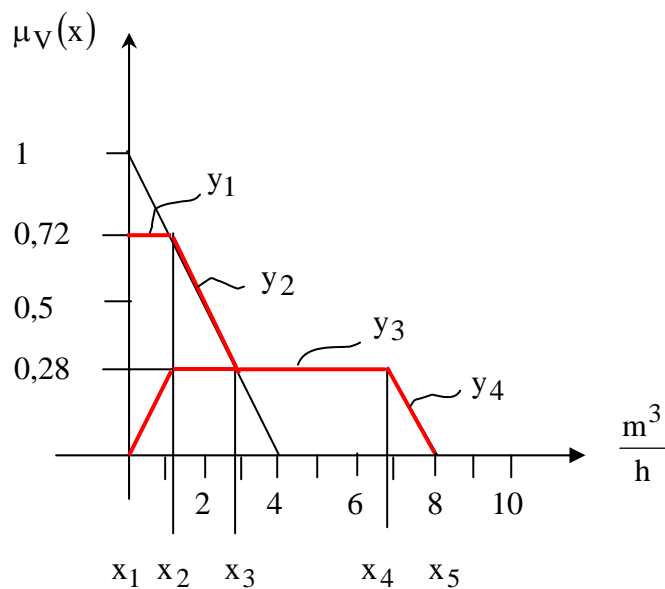
$$\mu_{V1}(x) = \max(\mu_{T \text{ sehr_hoch}}, \mu_{P \text{ über_normal}}) = \max(0.72, 0.5) = 0.72$$

$$\mu_{V2}(x) = \min(\mu_{T \text{ hoch}}, \mu_{P \text{ normal}}) = \min(0.28, 0.5) = 0.28$$

Festlegung der Ausgangsfuzzy-Menge mittels der max-Operation:

$$\mu_V(x) = \max(\mu_{V1}(x), \mu_{V2}(x))$$

Defuzzifizierung der Ausgangsfuzzy-Menge (rot eingezeichnet)



Parameter

$$x_1 = 0 ; x_2 = 1.2 ; x_3 = 2.8 ; x_4 = 6.8 ; x_5 = 8$$

$$y_1 = 0.733 \quad \Rightarrow \quad f_1(x) = 0.733$$

$$y_2 = m_1 \cdot x + b_1 \quad \Rightarrow \quad f_2(x) = -\frac{1}{4}x + 1$$

$$y_3 = 0.267 \quad \Rightarrow \quad f_3(x) = 0.267$$

$$y_4 = m_2 \cdot x + b_2 \quad \Rightarrow \quad f_4(x) = -\frac{1}{4}x + 2$$

$$m_1 = -\frac{1}{4} ; b_1 = 1$$

$$m_2 = -\frac{1}{4} ; b_2 = 2$$

Da es sich um eine "homogene" Fläche handelt:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} f_1(x) dx + \int_{x_2}^{x_3} f_2(x) dx + \int_{x_3}^{x_4} f_3(x) dx + \int_{x_4}^{x_5} f_4(x) dx = 3,06 \text{ FE}$$

$$M_{y_1} = \int_{x_1}^{x_2} f_1(x)x dx ; M_{y_2} = \int_{x_2}^{x_3} f_2(x)x dx ; M_{y_3} = \int_{x_3}^{x_4} f_3(x)x dx ; M_{y_4} = \int_{x_4}^{x_5} f_4(x)x dx$$

$$x_s \cdot A = M_y \Leftrightarrow x_s \cdot A = \int_a^b f(x)x dx = \sum_{i=1}^4 M_{y_i}$$

$$x_{\text{COG}} = \frac{\sum_{i=1}^4 M_{y_i}}{A} = 2,85$$

Folge: Die Defuzzifizierung liefert ein Stellwert von $2,85 \frac{\text{m}^3}{\text{h}}$.

⇔ Aus der Menge der möglichen Stellwerte wird mit Hilfe einer Defuzzifizierungs-Regel ein Stellwert ermittelt.

4.2.2 Methode von Sugeno

Die Methode von Sugeno unterscheidet sich ganz wesentlich von dem Konzept von Mamdani

- in Art der Regelbasis,
- in der Methode einen nicht fuzzy-wertigen Zustand des Systems zu bekommen. Eine besondere Defuzzifizierungsstrategie wird nicht benötigt.

Der Sugeno-Controller ist ein einfaches Fuzzy-System. Zur Inferenz wird die Min/Max-Methode und zur Defuzzifizierung die Schwerpunktmethod angewandt.

Der Controller besitzt die Eingaben $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$. Seine Übertragungsfunktion wird durch Regeln festgelegt. Für jede Regel R^i werden beliebige Fuzzy Sets und f_i benötigt. Fig. zeigt die allgemeine Struktur des Contollers

Der Controller berechnet für jede Regel R^i einen Erfüllungsgrad α_i . Die Ausgabe des Contollers ergibt dann daraus bei N Regeln die Ausgangsgröße y .

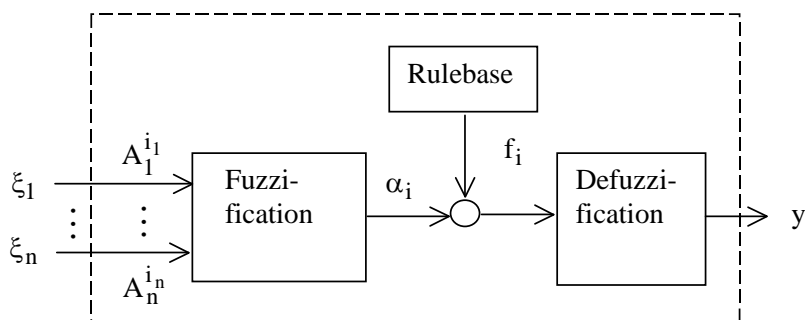


Fig.4.3: Allgemeine Struktur des Sugeno-Controllers

Bezeichnungen:

$\xi_1, \dots, \xi_j, \dots, \xi_n$: Eingangsvariable. Ausgangswert ist

$$y = \frac{\sum_{i \in N} \alpha_i \cdot f_i(\xi_1, \dots, \xi_n)}{\sum_{i \in N} \alpha_i} \quad (1)$$

$\alpha_i \neq 0$: Erfüllungsgrad (degree of fulfilment) mit dem eine aktive Regel an der Summenbildung beteiligt ist.

ξ_j : Jede Eingangsvariable ist partitioniert durch Fuzzy-Mengen $A_j^{(1)}, A_j^{(2)}$, etc. von Zugehörigkeitsfunktionen $\mu_j^{(1)}, \mu_j^{(2)}$, etc.

$R^{i_1 \dots i_n}$: Entscheidungsregeln. Der Ausgangswert wird bestimmt durch Regeln der Form

$R^{i_1 \dots i_n}$: IF ξ_{i_1} ist $A_1^{(i_1)}$ AND, ..., AND ξ_{i_n} ist $A_n^{(i_n)}$,
THEN $y = f_{i_1 \dots i_n}(\xi_1, \dots, \xi_n)$.

Der Index kennzeichnet die Fuzzy-Menge und somit die aktive Regel, die Indexmenge ist N.

Einschränkungen:

Jeder Input Set ist partitioniert durch Fuzzy Sets. Diese besitzen Einschränkungen, z. B. in der Form bereichsweise linearer Zugehörigkeitsfunktionen. Für eine verständliche mathematische Analyse ist es zweckmäßig, dass die Fuzzy Sets und die zugehörigen Zugehörigkeitsfunktionen bestimmten Bedingungen genügen.

(1) Festlegung: Dann folgt aus Gl. (1), dass der Controller-Output y eine konvexe Kombination seiner Konklusionen f_i ist. Es gilt:

$$\min_{i \in N} f_i \leq y \leq \max_{i \in N} f_i.$$

D.h. der Output ist beschränkt, der Wert liegt zwischen dem kleinsten und dem größten Wert einer Konklusion.

(2) Von allen Fuzzy Sets $A_j^{(1)}, A_j^{(2)}, \dots, A_j^{(k)}, \dots$ ist nur die Fuzzy-Menge $A_j^{(k)}$ aktiv, mit dem zugehörigen charakteristischen Punkt $x_j^{(k)}$. Durch diese Betrachtung ist es möglich jede Regel als einen Knoten für die Interpolation bezüglich des Ausgangs zu betrachten. Für einen Input $x^{(i)} = (x_1^{(i_1)}, \dots, x_n^{(i_n)})$ ist nur ein Fuzzy-Set aktiv, nämlich derjenige Fuzzy Set zugehörig zur Regel R^i . Somit: R^i ist aktiv und der Ausgangswert ist $y = f_i(x^{(i)})$. Interpretation: Für alle Indices i für die eine Regel R^i existiert interpoliert das Fuzzy-System zwischen den Knoten $(x^{(i)}, f_i(x^{(i)}))$.

(3) Festsetzung: Zwei charakteristische Punkte $x_j^{(a)}$ und $x_j^{(b)}$ werden als benachbarte Punkte bezeichnet, falls $x_j^{(a)} \neq x_j^{(b)}$ und im Intervall $[x_j^{(a)}, x_j^{(b)}]$ kein weiterer charakteristischer Punkt liegt. Dann sollen nur die zu den charakteristischen Punkte gehörenden Fuzzy Sets aktiv sein. Diese Festlegungen ermöglichen jeden Input Set in Intervalle einzuteilen und den Ausgangswert für jedes einzelne Intervall zu testen. Für jedes Intervall wird die Berechnung überschaubar, weil nur zwei Fuzzy Sets für die Berechnung benutzt werden.

4.2.3 Analytische Betrachtungen für den Sugeno-Controller

a) Der eindimensionale Sugeno-Controller

Für das Design eines Sugeno-Controllers ist es notwendig den elementaren Mechanismus von Input und Output zu verstehen, d.h. die Transferfunktion des Fuzzy-Systems. Insbesondere soll bei der Analyse der Einfluss der Zugehörigkeitsfunktionen (komplementär oder nicht komplementär) auf das Übertragungsverhalten näher untersucht werden.

Für den eindimensionalen Sugeno-Controller (besitzt nur einen Eingang) folgt für die Entscheidungsregel:

$$R^{i_1} : \text{IF } \xi_1 \text{ ist } A_1^{(i_1)} \text{ THEN } y = f_{i_1}(\xi_1) .$$

Vereinfachung: Da nur eine Eingangsvariable vorliegt können wir die Indizierung vereinfachen, wir schreiben

$$R^i : \text{IF } \xi \text{ ist } A_1^{(i)} \text{ THEN } y = f_i(\xi) .$$

Bei Fuzzy-Systemen mit nur einer Eingabe x werden oft Fuzzy-Mengen wie in Fig.4.4 verwendet. Solche Fuzzy-Mengen genügen Bedingungen die vorstehend formuliert wurden.

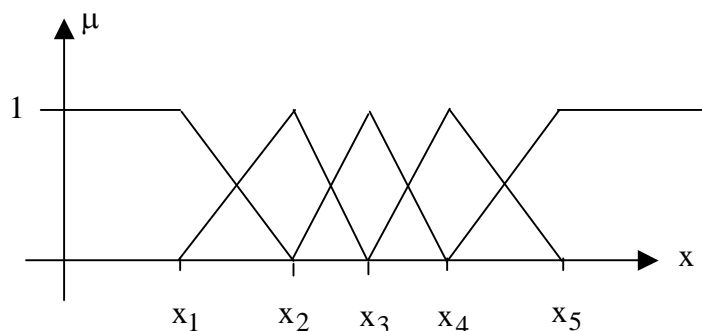


Fig.4.4: Typische Wahl von Fuzzy Sets (siehe auch Kap.2).

Bedingung (1): Für jede Regel R^i gibt es eine Eingabe ξ , für die nur eine Regel erfüllt ist. Für diese Eingabe ξ wird die Ausgabe $y = f_i(\xi)$ berechnet. Dadurch ist die Ausgabe des Fuzzy-Systems an N Stützstellen x_1, \dots, x_N festgelegt. Man kann daher sagen: Das Fuzzy-System interpoliert die Stützstellen x_1, \dots, x_N .

Bedingung (2): Zu den charakteristischen Punkten x_1 und x_2 (zwei aufeinanderfolgenden Stützstellen) gehören die aktiven Fuzzy-Mengen $A^{(1)}$ und $A^{(2)}$, weil nur die Regeln R^1 und R^2 aktiv sind. Für die Eingabe $\xi \in [x^1, x^2]$ berechnet sich die Ausgabe y zu

$$y = \frac{\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2}{\alpha_1 + \alpha_2} = \frac{\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_1 + \alpha_2 f_2 - \alpha_2 f_1}{\alpha_1 + \alpha_2}$$

$$= f_1 + g \cdot (f_2 - f_1)$$

mit von x abhängigen f_1, f_2, α_1 und α_2 sowie $g := \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$.

Der Offset f_1 und der Faktor $f_2 - f_1$, der die Steigung zwischen den Stützstellen x_1 und x_2 bestimmt, hängen nur von f_1 und f_2 , also dem Konklusionsteil der Regeln, ab.

Die Funktion $g = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$ oder

$$g = \begin{cases} \frac{1}{1 + \alpha_1 / \alpha_2} & \text{für } \alpha_2 \neq 0, \\ 0 & \text{für } \alpha_2 = 0, \end{cases}$$

gibt den Verlauf der Interpolationskurve zwischen x_1 und x_2 an und soll daher als Kurvenverlauf bezeichnet werden. Der Kurvenverlauf hängt nur von den Erfüllungsgraden α_1 und α_2 ab. Im eindimensionalen Fall ist

$\alpha_i(x) = \mu_{A_i}(x)$, mit $i=1,2$, d.h. vereinfacht dargestellt

$\alpha_1 = \mu_1$ und $\alpha_2 = \mu_2$,

folglich hängt der Kurvenverlauf nur vom Verhältnis der Zugehörigkeitsfunktionen ab.

Diskussion spezieller Zugehörigkeitsfunktionen: Komplementär vs. nicht komplementär

Allgemein ergeben sich im Zusammenhang mit den Zugehörigkeitsfunktionen zwei Bedingungen:

(1) Zur Erfüllung der Eigenschaft (1) des letzten Abschnitts muss $\mu_1(x_2) = \mu_2(x_1) = 0$ sein. Dies ist eine hinreichende Bedingung für eine exakte Interpolation der Stützstellen.

(2) Zum anderen sind Zugehörigkeitsfunktionen positiv, so dass die Ausgabe y eine Konvexkombination der Konklusionen f_i ist. Daher gilt (siehe oben Bedingung (1)):

$$\min(f_1, f_2) \leq y \leq \max(f_1, f_2)$$

Für die Untersuchung der am häufigsten angewandten Zugehörigkeitsfunktion ergeben sich wichtige Schlussfolgerungen aus Fall 1 und 2.

Fall 1: Komplementäre Zugehörigkeitsfunktionen

μ_1 und μ_2 sind komplementär, es ist also $\mu_1 + \mu_2 = 1$. Dieser Fall liegt bei vielen Dreiecks-, Trapez- und Sinusfunktionen vor und wird in Fig.4.3 dargestellt. Es gilt:

$$\mu_1 = \overline{\mu_2} \Rightarrow \mu_1 + \mu_2 = 1 \Rightarrow g = \mu_2 \quad .$$

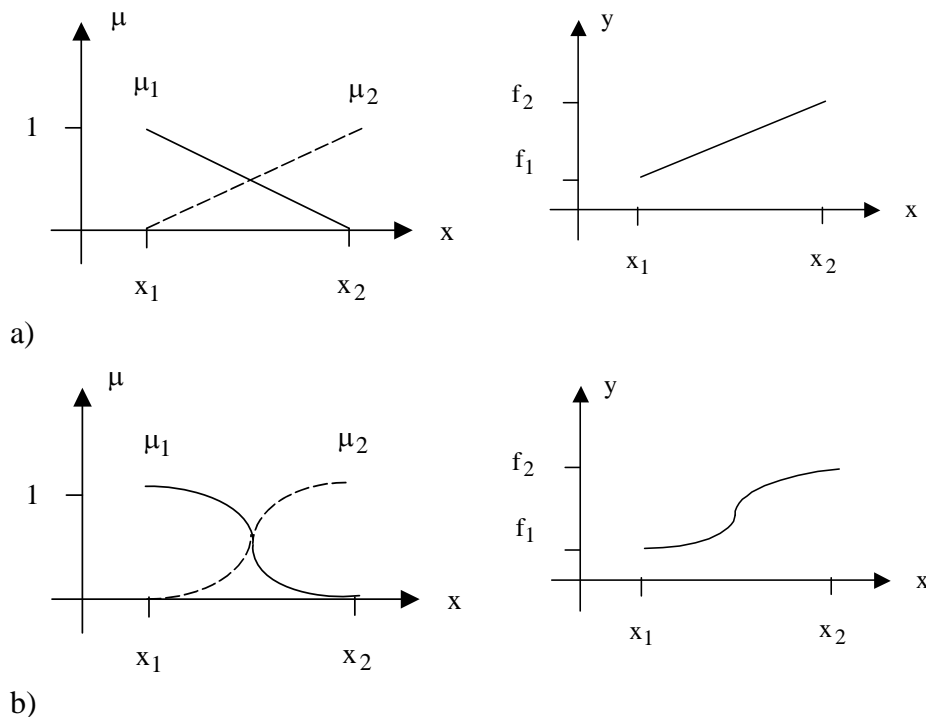


Fig. 4.5: Ausgabe des Sugeno-Controllers für $\mu_1 + \mu_2 = 1$ für a) lineare und b) sinusförmige Zugehörigkeitsfunktionen.

Der Verlauf der Interpolationsfunktion ist mit der Zugehörigkeitsfunktion μ_2 identisch. Das bedeutet, dass die Interpolation stets nur so gut sein kann wie die Zugehörigkeitsfunktion:

Lineare Zugehörigkeitsfunktionen bedingen eine lineare Interpolation, sinusförmige Zugehörigkeitsfunktionen eine sinusförmige Interpolation usw.

Fall 2: Nicht komplementäre Zugehörigkeitsfunktionen

Sind μ_1 und μ_2 nicht komplementär ($\mu_1 + \mu_2 \neq 1$), so lassen sich mit einfachen Zugehörigkeitsfunktionen komplexe Kurvenverläufe erreichen.

Beh. 1: Werden wie in Fig. 4.6 dargestellt für die Zugehörigkeitsfunktionen μ_1 und μ_2 beispielsweise lineare Funktionen verwendet, so lassen sich diese wegen der Bedingung $\mu_1(x_2) = \mu_2(x_1) = 0$ schreiben als

$$\begin{aligned} \mu_1 &= h_1(1-t), \\ \mu_2 &= h_2t, \end{aligned}$$

mit $h_1, h_2 \in \mathbb{R}^+$. Zur Abkürzung wird $t(x) = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$.

Beh. 2: Mit $m_1 = \frac{h_1}{h_2-h_1}$ und $m_2 = \frac{h_2}{h_2-h_1}$ folgt:

$$g = \frac{h_2t}{(h_2-h_1)t+h_1} \begin{cases} t & \text{für } h_2 = h_1, \\ \frac{m_2t}{t+m_1} = m_2 - \frac{m_2}{1+t/m_1} & \text{für } h_2 \neq h_1, \end{cases}$$

d.h. für $h_2 \neq h_1$ ist der Kurvenverlauf g ein Abschnitt der Hyperbel

$-m_2/z$ zwischen $z_{x=x_1} = 1$ und $z_{x=x_2} = 1 + 1/m_1 = h_2/h_1$.

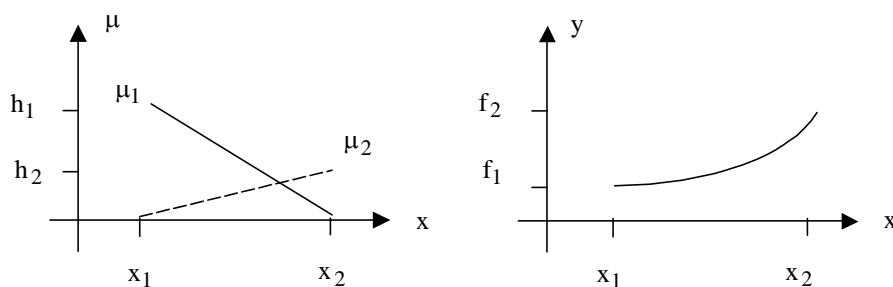


Fig. 4.6: Ausgabe des Sugeno-Controllers für nicht komplementäre lineare Zugehörigkeitsfunktionen, d.h. $\mu_1 + \mu_2 \neq 1$.

Bew.1: Mit der Transformation $t(x)$ transformieren wir das Intervall $[x_1, x_2]$ in das Intervall $[0, 1]$:

$$t(x) \Big|_{x_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \Big|_{x_1} = 0 \quad \text{und} \quad t(x) \Big|_{x_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \Big|_{x_2} = 1 .$$

Es folgt:

$$\mu_1 = h_1 \cdot \underbrace{(1 - t)}_{= 0 \text{ bei } x_1} = h_1 \text{ an der Stelle } x_1$$

$$\mu_1 = h_1 \cdot \underbrace{(1 - t)}_{= 1 \text{ bei } x_2} = 0 \text{ bei } x_2$$

$$\mu_2 = h_2 \cdot \underbrace{t}_{= 0 \text{ bei } x_1} = 0 \text{ bei } x_1$$

$$\mu_2 = h_2 \cdot \underbrace{t}_{= 1 \text{ bei } x_2} = h_2 \text{ bei } x_2$$

Bew.2: Mit $m_1 := \frac{h_1}{h_2 - h_1}$ und $m_2 := \frac{h_2}{h_2 - h_1}$, $h_2 \neq h_1$

folgt für

$$g = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} = \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} = \frac{h_2 \cdot t}{h_1(1-t) + h_2 t} = \frac{h_2 \cdot t}{h_1 - h_1 \cdot t + h_2 \cdot t}$$

$$g = \frac{h_2 \cdot t}{(h_2 - h_1) \cdot t + h_1}$$

$$g \Big|_{h_2=h_1} = \frac{h_2 \cdot t}{(h_2 - h_1) \cdot t + h_1} \Big|_{h_2=h_1} = t$$

$$g \Big|_{h_2 \neq h_1} = \frac{h_2 \cdot t}{(h_2 - h_1) \cdot t + h_1}, \text{ folgt den Def. für } m_1 \text{ und } m_2$$

$$\begin{aligned} &= \frac{m_2 \cdot (h_2 - h_1) \cdot t}{(h_2 - h_1)t + m_1(h_2 - h_1)t \frac{1}{t}} \\ &= m_2 \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{t}{m_1}} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Also: } g = m_2 - \frac{m_2}{1 + \frac{t}{m_1}} \text{ mit } t = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

ergibt sich die vorstehende Behauptung.

Beispiel: Für die Gaußfunktion $\varphi(x) = e^{-x^2}$ als Zugehörigkeitsfunktion ergibt sich

$$\alpha_i(x) = \varphi(x - x_i) \Rightarrow g = \frac{1}{1 + \alpha e^{-cx}} \text{ mit } \alpha = \exp(x_2^2 - x_1^2)$$

und $c = 2(x_2 - x_1)$.

Die Funktion φ ist aber nirgends 0, so dass stets alle Regeln erfüllt sind. Im allgemeinen wird daher keine exakte Interpolation erreicht.

Uchino et al. (/Uc/) haben für den Konklusionsteil der Regeln von der Eingabe x abhängige Singletons vorgeschlagen. In dieser Arbeit wurden von x linear abhängige Konklusionen gewählt und Zugehörigkeitsfunktionen mit konstanter Summe verwendet. Dadurch ergeben sich Polynome 2. Ordnung als Interpolationsfunktionen.

Allgemein ergibt sich aus der Wahl von Funktionen n -ter Ordnung als Konklusion eine Interpolationsfunktion $n + 1$ -ter Ordnung. Daher können konventionelle Interpolationsverfahren, die lokal mit Polynomen interpolieren, auch mit Fuzzy-Systemen dargestellt werden (/Ma/).

An dieser Stelle wird verständlich, warum Fuzzy-Methoden geeignet sind quadratische, allgemeiner formuliert nichtlineare Regelkennlinien zu approximieren.

Design-Regel für den eindimensionalen Sugeno-Controller:

Unter Berücksichtigung der Einschränkungen und der gewählten Fuzzy Sets $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots$, der Singletons f_i in der Konklusion lassen sich bezüglich der Übertragungsfunktion Design-Regeln wie folgt extrahieren:

- Zu jeder Regel R^i existiert ein Interpolationsknoten $\left(x^{(i)}, f_i(x^{(i)})\right)$.
- Der Ausgangswert des Fuzzy-Controllers ist beschränkt aufgrund der Interpolationsknoten.
- Die Form der Übertragungsfunktion zwischen den Interpolationsknoten ist festgelegt durch die Art der Zugehörigkeitsfunktionen.
- Die Art der Konklusion liefert Hinweise für die Verschiebung und Streckung der Übertragungsfunktion.

- Der Verlauf der Interpolationskurve hängt nur von dem Quotienten der Erfüllungsgraden α_1 und α_2 ab (siehe Funktion g in eindimensionalen Fall).

b) Der zweidimensionale Sugeno-Controller

x_1, x_2 : Eingangsvariable

$R^{i_1 i_2}$: Regeln für den zweidimensionalen Controller

$R^{i_1 i_2}$: IF x_1 ist $A_1^{(i_1)}$ AND x_2 ist $A_2^{(i_2)}$
THEN $y = f_{i_1 i_2}(x_1, x_2)$

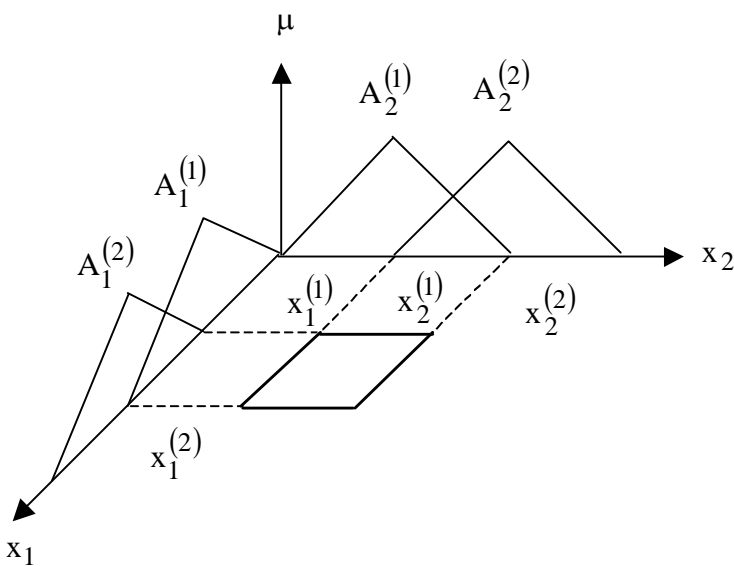


Fig. 4.7: Zweidimensionaler Sugeno-Controller definiert im Bereich $[x_1^{(1)}, x_1^{(2)}] \times [x_2^{(1)}, x_2^{(2)}]$.

Im Bereich der Eingangsvariable x_1 sind die Fuzzy Sets $A_1^{(1)}$ und $A_1^{(2)}$ aktiv, entsprechend bezüglich x_2 sind nur die Fuzzy Sets $A_2^{(1)}$ und $A_2^{(2)}$ aktiv. Für eine Eingangsgröße $x = (x_1, x_2) \in [x_1^{(1)}, x_1^{(2)}] \times [x_2^{(1)}, x_2^{(2)}]$ wurden die Fuzzy Sets $A_1^{(1)}, A_1^{(2)}, A_2^{(1)}$ und $A_2^{(2)}$ gewählt mit den möglichen aktiven Regeln R^{11}, R^{12}, R^{21} und R^{22} . Die Indexmenge ist gegeben durch $i \in \{11, 12, 21, 22\}$.

Für den Ausgangswert des zweidimensionalen Sugeno-Controllers erhalten wir

$$y = \frac{\alpha_{11} f_{11} + \alpha_{12} f_{12} + \alpha_{21} f_{21} + \alpha_{22} f_{22}}{\alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{21} + \alpha_{22}} .$$

In der vorher dargestellten eingeschränkten Struktur kann der zweidimensionale Sugeno-Controller einer mathematischen Analyse unterzogen werden. Mit Hilfe des Min- und Produkt-Operators können wir die Übertragungsfunktion und ihre Werte für $x = (x_1, x_2)$ darstellen und Design-Regeln für den Sugeno-Controller aufstellen (weitere Einzelheiten siehe Grauel/Mackenberg: Fuzzy Sets and Systems 85(1997), pp. 165-175). Als Ergebnis erhalten wir glatte Übertragungsfunktionen im \mathbb{R}^3 .

4.2.4 Sliding Mode Fuzzy Control (FC)

Sliding Mode FC ist eine Methode, "harte" Schaltzustände eines Reglers mit gleitendem Übergang zu versehen. Solche Übergänge lassen sich mit Hilfe des Fuzzy-Konzepts erreichen, indem unscharfe und sich überlappende Gebiete für die einzelnen linguistischen Terme der Stellgröße eingeführt werden (/PI-5/).

Es sei zunächst ein Zweipunktregler betrachtet, der je nach dem Vorzeichen der Regelabweichung e die Stellgrößenwerte $\pm u_{\max}$ annehmen kann. Wird neben der Regelabweichung auch die zeitliche Ableitung \dot{e} berücksichtigt, so ergibt sich die folgende Form für eine Regelstrategie

$$u = \begin{cases} -u_{\max} & s < 0 \\ +u_{\max} & s \geq 0 \end{cases} \quad \text{für} \quad \text{mit } s = e + \lambda \dot{e}, \lambda > 0.$$

Die Dynamik des Reglers lässt sich in der transformierten (e, \dot{e}) -Ebene, der Phasenebene, darstellen. Hierbei erkennt man, dass die Gerade $s = 0$, die Ebene in zwei Bereiche aufteilt. Die Umschaltbedingung liegt in Form einer Schaltgeraden vor (Fig.4.8).

Technisch lässt sich die Schaltgerade durch einen Zweipunktregler mit einem PD-Regler (Verstärkung = 1, Vorhaltezeit = λ) realisieren (Fig. 4.9).

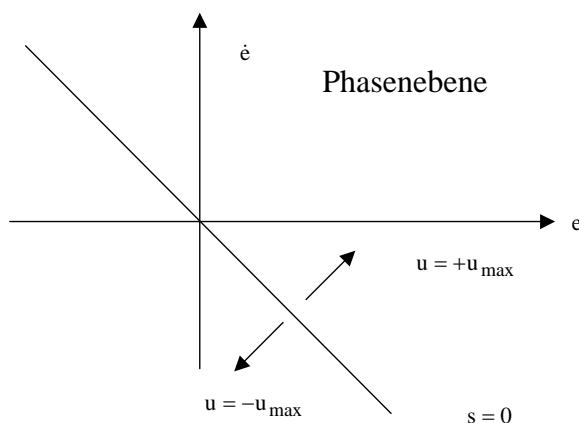


Fig. 4.8: Zweipunktregler mit Schaltgeraden $e + \lambda \dot{e} = 0$. Die Steigung der Schaltgeraden ist durch den Parameter λ festgelegt. Für $s > 0$ (oberhalb der Geraden) liefert der Regler $u = u_{\max}$ und für $s \leq 0$ den Wert $-u_{\max}$.

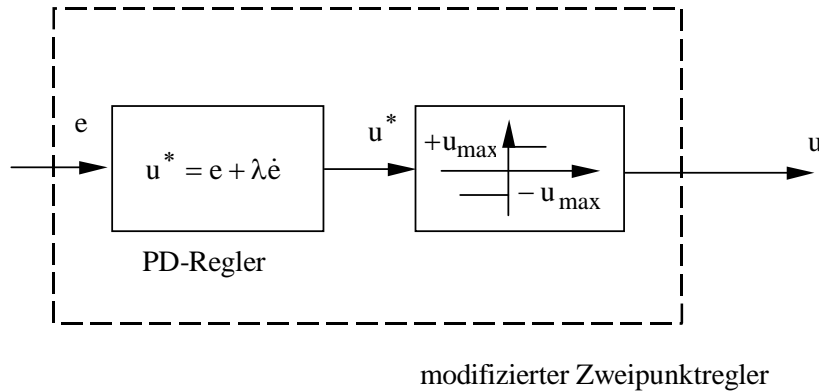


Fig. 4.9: Realisierung einer Schaltgeraden (/Kah/) mit Hilfe eines modifizierten Zweipunktreglers.

Es sei zunächst das Verhalten der Regelstrecke bei sprunghafter Veränderung der Führungsgröße untersucht. Dazu sei der modifizierte Zweipunktregler mit einer Regelstrecke 2. Ordnung (linear) verschaltet (Fig. 4.10).

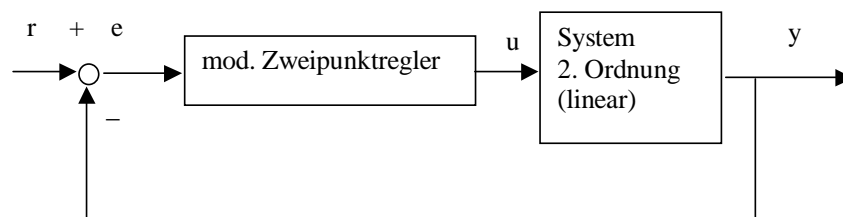


Fig. 4.10: Geregeltes lineares System 2. Ordnung mit einem modifizierten Zweipunktregler.

Es sei angenommen, dass die Trajektorien der Regelstrecke die in Fig. 4.11 dargestellten Verlauf haben. Der Anfangszustand in der Phasenebene sei P_0 (nach Zuschaltung einer sprunghafter Veränderung der Führungsgröße), siehe Fig. 4.12.

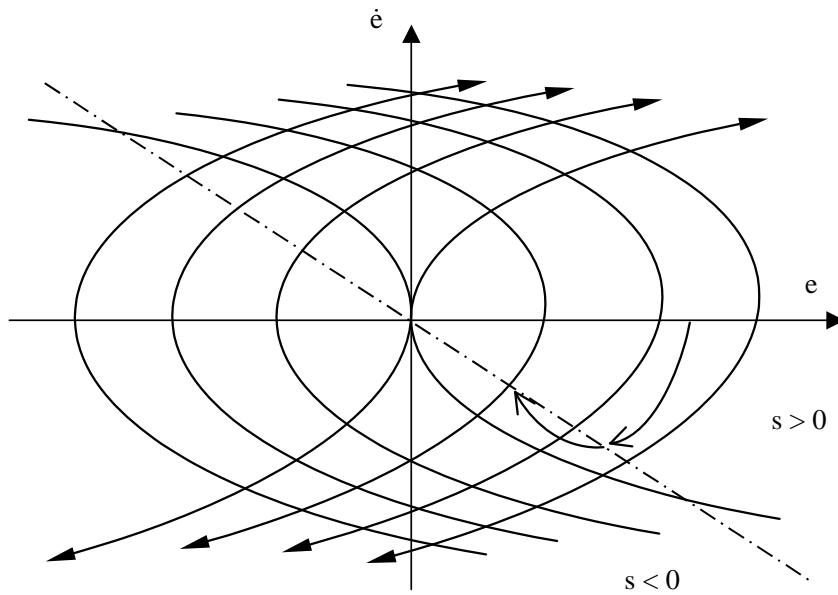


Fig. 4.11: Phasenporträt der Regelstrecke (/P6/).

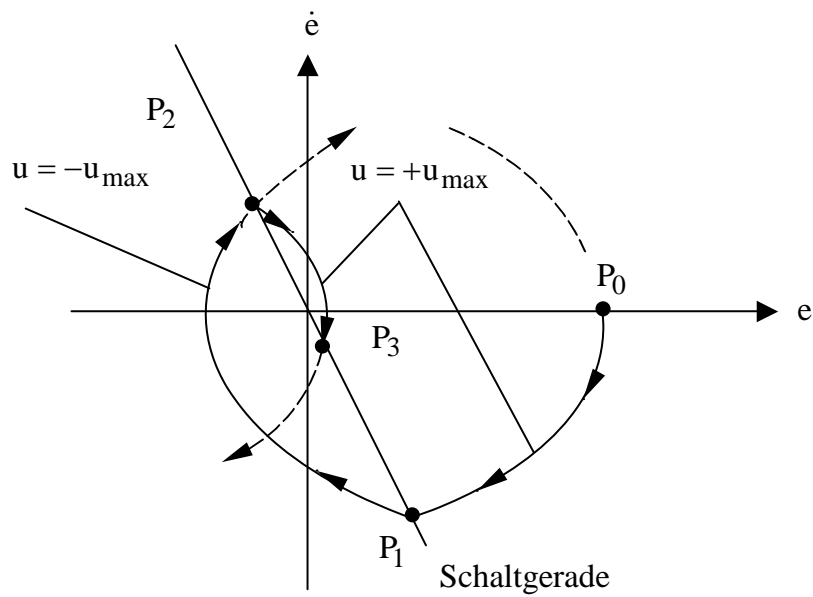


Fig. 4.12: Phasenbahnwechsel aufgrund des Schaltverhaltens des Reglers.

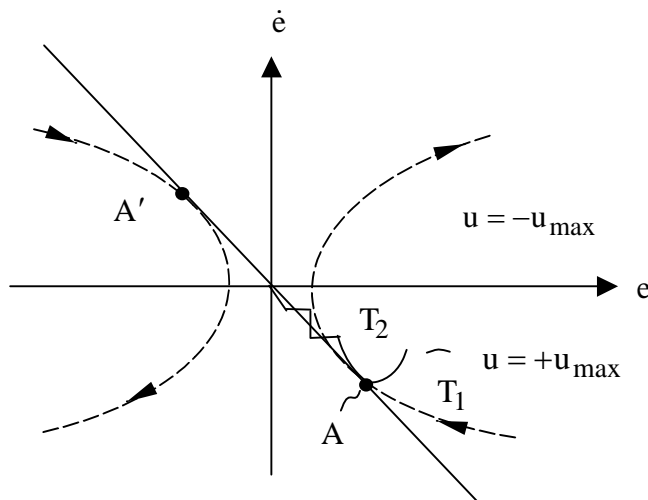


Fig. 4.13: Phasenbahn des Systems im Phasendiagramm: Sliding Mode.

Das System bewegt sich auf der zugehörigen Phasenbahn für $u = +u_{\max}$, bis zum Punkt P_1 auf der Schaltgeraden. Der Regler schaltet auf die Stellgröße $u = -u_{\max}$ (Zweipunktregler), damit bewegt sich das System auf der entsprechenden Phasenbahn bis zur Stelle P_2 . Dort schaltet der Regler wiederum und das System gelangt nach P_3 usw. Dieser Vorgang wiederholt sich so oft bis in die Nähe des Ursprungsbereichs. Tangiert in diesem Bereich die Schaltgerade mit den Trajektorien für $u = -u_{\max}$ und $u = +u_{\max}$ (siehe Fig. 4.13), so setzt ein ständiges Umschalten des Reglers in unmittelbarer Nähe der Schaltgeraden ein. Das System gleitet in den Ursprung der Phasenebene, auf dem Wege dorthin befindet es sich im sogenannten Sliding-Mode.

In Fig. 4.13 kennzeichnet der Punkt A auf der Schaltgeraden den Beginn von Sliding-Mode. Aus dieser Betrachtung in der Phasenebene folgt, dass der Regler (Sliding-Mode-Regler) stabiles Verhalten zeigt - aber die Dynamik ist durch hochfrequentes Schalten der Stellgröße gekennzeichnet. Dadurch können hohe Belastungen z.B. bei einem Antriebssystem, der Steuereinheit und des Getriebes entstehen. Um das hoch-

frequente Schalten zu "dämpfen", kann man in der Nähe der Schaltgeraden eine Grenzschicht einführen (/Dr/). Eine andere Möglichkeit "hartes" hochfrequentes Schalten zu dämpfen, liefert das Fuzzy-Konzept. Die Schaltgerade trennt den \mathbb{R}^2 in zwei Halbebenen, mit einer Aufteilung in mehrere, unscharfe Gebiete oberhalb und unterhalb der Schaltgeraden kann ein "weicherer" Verlauf der Stellgröße erreicht werden (Fuzzy-Sliding-Mode-Regler). Es werden Zugehörigkeitsfunktionen für die Eingangsgrößen e und \dot{e} wie in Fig. 4.14 gezeigt gewählt, für die Ausgangsgröße (Fig. 4.15) werden Singletons gewählt bzw. übliche Defuzzifizierungsmethoden. Eine Regel aus der Regelbasis hat die übliche Form:

$$\text{IF } e = \text{PB AND } \dot{e} = \text{NS THEN } u = \text{NS.}$$

Anwendungsbereiche von Sliding-Mode Fuzzy Control liegen im Bereich der Automatisierungstechnik, speziell der Robotersteuerung (/P1,2,5,6/).

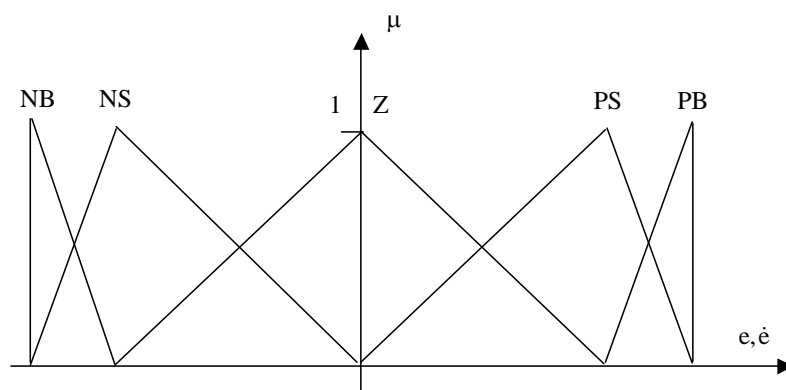


Fig. 4.14: Fuzzy-Set für die Eingangsgrößen e und \dot{e}

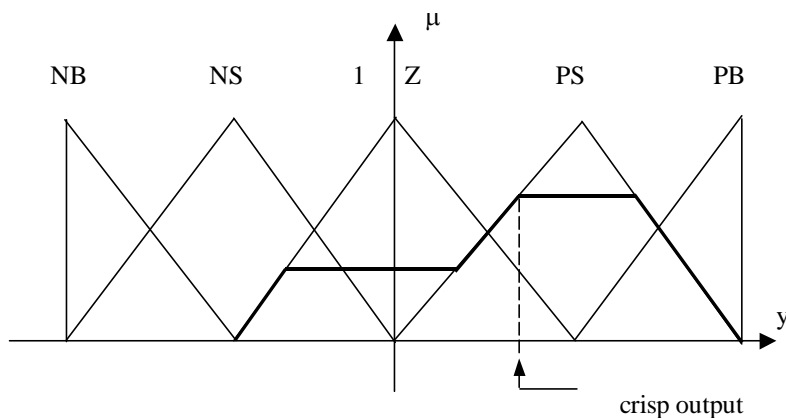


Fig. 4.15: Fuzzy-Set für die Ausgangsgröße. Die Defuzzifizierung kann mit den üblichen Methoden vorgenommen werden.

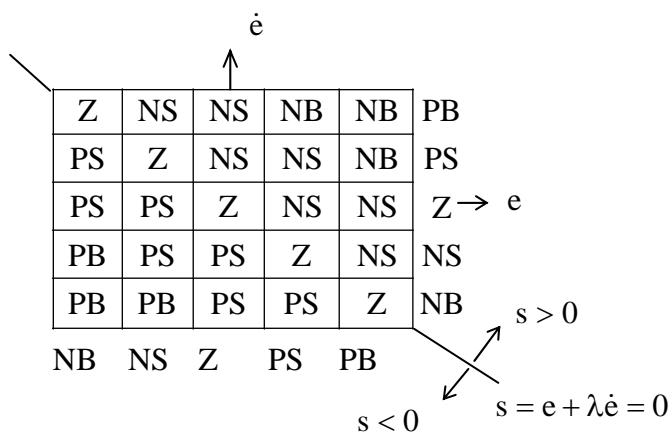


Fig. 4.16: Matrixform für die Regelbasis (in der normierten Phasenebene) zwischen den Eingangsgrößen e , \dot{e} und der Ausgangsgröße u .

5. Anmerkungen zu Neuro-Fuzzy-Systeme

a) Eine Taxonomie für Neuro-Fuzzy-Systeme

Bedeutung:

"Neuro" meint: Automatische Adaption von Systemparametern auf der Grundlage von Beispieldaten.
Konsequente heuristische Suche nach einem (lokalen) Minimum über dem Parameterraum.

"Fuzzy" meint: Wissensbasiertheit und Ausnutzung von Unschärfe.
Nutzung von vorhandenem Wissen.
Interpretierbarkeit des Systems.

Ein Neuro-Fuzzy-System kann wie ein Neuronales Netz interpretiert werden. Es handelt sich weder um Fuzzy-Logik im engeren Sinne noch um Fuzzy-Expertensysteme, sondern um Systeme zur **Funktionsapproximation bzw. Interpolation!**

b) Merkmale von Neuro-Fuzzy-Systemen

- Lernalgorithmus zur Erzeugung linguistischer Regeln
- Lernalgorithmus für Mitgliedschaftsfunktionen
- Möglichkeit vorhandenes Wissen bei der Initialisierung eines Systems zu benutzen
- Struktur ist interpretierbar
- Parallele Architektur: neuronale Hardware kann benutzt werden

c) Neuronale Netze vs. Fuzzy Systeme

Neuronales Netz

+ Vorteile

- Kein mathematisches Modell notwendig
- lernfähig
- kein Regelwissen notwendig

- Nachteile

- Black Box
- kein Wissen extrahierbar
- kein Vorwissen nutzbar (learning from scratch)
- Test auf Korrektheit schwer
- Anpassung an veränderte Umgebung erfordert meist neuen Trainingsvorgang

Fuzzy-System

+ Vorteile

- kein mathematisches Modell notwendig
- Regelwissen nutzbar
- gut interpretierbar
- semantisch und formal abgesichert

- Nachteile

- nicht lernfähig
- Regelwissen muss existieren
- keine formale Tuningmethode
- "verbessertes" System hat oft semantische Probleme
- Anpassung an veränderte Umgebung erfordert Tuning

d) Computational Intelligence (CI) vs. Artificial Intelligence

Eigenschaften:

Intelligente Systeme

- lernend bzw. selbstlernend/ lernend (aus Erfahrung)
- optimierend
- Verarbeitung: vages Wissen
- regel-basiert: qualitative Kenntnisse von Experten können berücksichtigt werden
- Mehrwertige Logik

Expertensysteme

- nicht anpassungsfähig auch nicht lernfähig
- nicht optimierend
- Verarbeitung vager Entscheidungen
- Prädikaten-Logik

6. Schlussbemerkung

6.1 Softwareprodukte

Schon seit geraumer Zeit werden auf dem Markt brauchbare Software-Tools von verschiedenen Firmen angeboten für Lehr- und Forschungszwecke. Software-Tools:

- a) MATLAB
Brauchbares, weit verbreitetes und nützliches Tool mit speziellen Toolboxes. Leider sehr teuer!
- b) WinFACT, Ing.-Büro Dr. Kahlert.
Sehr stabiles, preiswertes und einfach anzuwendendes Tool.
- c) Tool's von TRANSFERTECH
Tool's für Neuro- und Fuzzy-Technologie.
- d) Software-Tool SieFuzzy
- e) ELITE Foundation, Pascalstraße 69, 52076 Aachen.
ELITE hat sehr brauchbare Tool's im Sortiment.

6.2 Hardware

- a) Fuzzy MicroController, etc.
American Neuralogix, Inc.

6.3 Zeitschriften

- a) AT, Automatisierungstechnik, Oldenburg-Verlag
- b) ATP, Automatisierungstechnische Praxis, Oldenburg Verlag
- c) Fuzzy Sets and Systems, Elsevier.
- d) International Journal of Approximate Reasoning, Elsevier.
- e) International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, World Scientific Publishing Company.

- f) MATHWARE & SOFT COMPUTING, U Politecnica de Catalunya, Barcelona, Spain.

Literaturverzeichnis

- /Ba 1/ Bandemer, H., Gottwald,S.: Einführung in Fuzzy-Methoden - Theorie und Anwendung unscharfer Mengen, Akademie-Verlag, Berlin, 4. überarbeitete und erweiterte Auflage (1993).
- /Bö/ Böhme,G.: Fuzzy-Logik, Springer-Verlag, Berlin (1993).
- /Bon/ Bonfig,K.W. et al.: Fuzzy Logik in der industriellen Automatisierung Expertenverlag, Ehningen (1992).
- /C / Cox,M.G.: The numerical evaluation of B-Splines, J. of Mathematics and its Applications, vol.10, pp.134-149 (1972).
- /dB/ de Boor,C.: On Calculating with B-Splines, J. of Approximation Theory, Vol.6, pp. 50-62 (1972).
- /Dr / Driankov,D., Hellendorn,H., Reinfrank,M.: An Introduction to Fuzzy Control, Springer Verlag, Heidelberg (1993).
- /GL99/Grauel,A., Ludwig,L.A.: Construction of differentiable membership functions. Fuzzy Sets and Systems 101 (2), S. 219-225 (1999).
- /Go / Goetscherian,V.: From Binary to Grey-tone Image Processing Using Fuzzy Logic Concept, Pattern Recognition 12, 7(1980).
- /GRA99/ Grauel,A.: Fuzzy-Logik, Kap.5.9 in Taschenbuch der Mathematik (I.N. BRONSTEIN, K.A. SEMENDJAJEW, G.MUSIOL, H:MÜHLIG, Hrsg), 4. Aufl., S. 351-371, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt (1999).
- /GRA/ Grauel,A.: Fuzzy-Logik, BI Wissenschaftsverlag, Mannheim (1995).
- /He1/ Hecht,A., Hellendoorn,H., Leufke,A., Storjohann,K.: Adaptions- und Akquisitionstechniken für Fuzzy-Systeme, Teil I, Informatik Spektrum 17, 87-95 (1994).
- /He2/ Hecht,A., Hellendoorn,H., Leufke,A., Storjohann,K.: Teil II, Informatik Spektrum 17, 164-170 (1994).

- /Kah / Kahlert,J., Frank,H.: Fuzzy-Logik und Fuzzy-Control, Eine anwendungsorientierte Einführung mit Begleitsoftware, Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden (1993).
- /Ki 1/ Kiendl,H.: Fuzzy-Regler mit Hyperinferenz und Hyperdefuzzifizierungsstrategie, Proceedings 3. Dortmunder Fuzzy-Tage, Dortmund (1993).
- /Ki 2/ Kindl,H., Fritsch,M.: Fuzzy Control, Automatisierungstechnik 41, A5 (1993).
- /Leh3/ B-M. Pfeiffer, J. Jäkel, A. Kroll, C. Kuhn, H.-B. Kuntze, U. Lehmann, T. Slawinski, V. Tews: Erfolgreiche Anwendungen von Fuzzy Logik und Fuzzy Control (Teil 2). Automatisierungstechnik at 11 (2002), Oldenburg Verlag, S. 511 –521.
- /Leh2/ B-M. Pfeiffer, J. Jäkel, A. Kroll, C. Kuhn, H.-B. Kuntze, U. Lehmann, T. Slawinski, V. Tews: Erfolgreiche Anwendungen von Fuzzy Logik und Fuzzy Control (Teil 1). Automatisierungstechnik at 10 (2002), Oldenburg Verlag, S. 461 –471.
- /Leh1/ Lehmann, U. (Hsg.); Bongards, M.; Johannes, H.: Neuronale Fuzzy-Logik, Neuro-Fuzzy-Regler, Mustererkennung, Identifikation, Adaption, Data Mining; Reihe Informatik/Kommunikation. VDI-Fortschrittsbericht, Düsseldorf, VDI-Verlag (2000); ISBN 3-18-3648 10-5.
- /Ma / Grauel,A., Mackenberg,H.: Interpolation mit Fuzzy-Logik, Proceedings Fuzzy-Systeme'94, Klassifikation, Entscheidungssupport & Control, München (1994).
- /Mam/ Mamdani, E.H., Gaines,B.R.: Fuzzy Reasoning and its Applications, Academic Press, London (1987).
- /MW/ Mangasarin,O.L., Wolberg,W.H.: Cancer Diagnosis via Linear Programming, SIAM News 23(5), pp.1-18, 1990.
- /May/ Mayer,A., Mechler,B., Schlindwein,A., Wolke,R.: Fuzzy Logic / Einführung und Leitfaden zur praktischen Anwendung mit Fuzzy-Shell in C⁺⁺, Addison-Wesley Publ. Company, Bonn (1993)
- /P1 / Palm,R.: Fuzzy Controller for a Sensor Guided Robot, Fuzzy Sets and Systems 31(1989).

- /P2 / Palm,R.: Steuerung eines sensorgeführten Roboters unter Berücksichtigung eines unscharfen Regelkonzepts, MSR 32(1989).
- /P3 / Palm,R., Hellendorn,H.: Fuzzy-Control: Grundlagen und Entwicklungsmethoden, KI 4(1991).
- /P4 / Palm,R., Hellendorn,H.: Fuzzy-Methoden in der Robotik, KI 4(1991).
- /P5 / Palm,R., Rehfueß, U.: Fuzzy-Steuerung in der Robotik, Mikroelektronik 1 (1992).
- /P6 / Palm,R.: Fuzzy-Systems '93-Management unsicherer Informationen, Tutorium, Deutsche Informatik-Akademie, Bonn(1993).
- /P/ Pedrycz,W.: Fuzzy Evolutionary Computation, Chapter 2.3, Kluwer Academic Publishers, Boston 1997.
- /Pf / N.Pfluger,J.Yen, R.Langari: A Defuzzification Strategy for a Fuzzy Logic Controller Employing Prohibitive Information in Command Formulation in IEEE International Conference on Fuzzy Systems (1992).
- /Re/ Renners,I.: Doktorarbeit, U Magdeburg (2004).
- /Su 1/ Sugeno,M.: Fuzzy Control, Nikkan Kogyo, Tokyo (1988).
- /Su 2/ Sugeno,M., Kang,G.T.: Strukture Identifikation of Fuzzy Model, Fuzzy Sets and Systems 28, 15-33 (1988).
- /Su 3/ Sugeno,M., Tanaka,K.:Successive Identification of Fuzzy Model and its Application to Prediction of Complex System, Fuzzy Sets and Systems 42, 315-344 (1991).
- /SUG85/ SUGENO,M.: An introductory survey of fuzzy control. Information Sciences 36, S. 59-83 (1985).
- /Tan/ Tanaka,K., Sugeno,M.: Stability Analysis and Design of Fuzzy Control Systems, Fuzzy Sets and Systems 45, 135-156 (1992)
- /Tak/ Takagi,T., Sugeno,M.: Fuzzy Identification of Systems and its Application to Modeling and Control, IEEE Trans. on System Man and Cybernetics 15, 116-132 (1985).

- /Uc/ Uchino,E. et al.: Fuzzy Rule-Based Single Interpolation Algorithm for Discrete Signal, Fuzzy Sets and Systems 59,259-270(1993).
- /Yam/ Yamaguchi,T.: Fuzzy Predict and Control Method and its Application, IEEE Int. Conf. CONTROL 88 (1988).



Kompetenzplattform
**Computer Vision based on
Computational Intelligence**