Bezeichnungsweise:

a_k heißt k-tes Glied der Reihe
$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ heißt endliche Reihe mit n Gliedern.

Bemerkung: $\sum_{k=0}^{n} a_k$ ist ebenfalls üblich.

Beispiele

1.

$$a_k = k, \ \{a_k\} = 1, 2, 3, 4 \cdots$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$$

Diese Reihe heißt arithmetische Reihe. Bewiesen wurde schon

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

2. Geometrische Reihe:

$$a_k = q^k, \ q \in I\!R$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k$$

Die Summenformel wird mit dem üblichen Trick $(q \neq 1)$ hergeleitet:

$$S_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n \tag{1.1}$$
$$qS_n = q + q^2 + \cdots + q^{n+1} \tag{1.2}$$
$$S_n(1-q) = 1 - q^{n+1} \tag{1.3}$$

wobei die letzte Zeile durch Subtraktion der 2. von der ersten entsteht.

2. Geometrische Reihe:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{1 - \lim_{n \to \infty} q^{n+1}}{1 - q} = \begin{cases} \infty & , \quad |q| \geq 1 \\ \frac{1}{1-q} & , \quad |q| < 1 \end{cases}$$

Falls $|q| \geq 1 \Rightarrow$ Reihe divergent.

Falls $|q| < 1 \Rightarrow$ Reihe konvergent mit Summe

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1 - q}, \quad |q| < 1$$

Diese wichtige Formel ist schon oft aufgetaucht und wird auch weiterhin immer wieder vorkommen!

3. Man betrachte einen Spezialfall:

$$q = \frac{1}{2}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \cdots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

Nun folgt noch ein weiterer wichtiger Begriff:

Definition

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt absolut konvergent, wenn

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty,$$

d.h. die Reihe aus den Absolutbeträgen ist konvergent.