Studienbuch Angewandte Mathematik

Marie-Theres Roeckerath-Ries, Sigmar Ries

1. Auflage 2009

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 5

Lösungen zu den Aufgaben

5.1 Kapitel 1

1. Alle 3 Reihen können nicht konvergent sein, da immer $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 1$ ist.

2. Alle Reihen lassen sich mit Wurzel- und Quotientenkriterium behandeln, eine Lösung wird jeweils angegeben:

   a) Wurzelkriterium:

   $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|nx^{n-1}|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x^{n-1}} = x,\ x > 0$$

   d.h. konvergent für $x < 1$, divergent für $x > 1$. Für $x = 1$ liefert das Wurzelkriterium keine Lösung. Einsetzen von 1 für x in die Reihe liefert

   $$\sum_{n=1}^{\infty} n = \infty$$

   Die Reihe ist also in diesem Fall divergent.

   b) Quotientenkriterium:

   $$\lim_{n\to\infty} |\frac{x^{n+1}2(n+2)!}{x^n 2(n+3)!}| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+3} = 0 < 1$$

   Die Reihe ist also für alle $x > 0$ konvergent.

   c) Wurzelkriterium:

   $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(\ln(n))^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n)} = 0 < 1$$

   Reihe konvergent.

d) Wurzelkriterium:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{3n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{3}n} = 0 < 1$$

Reihe konvergent.

3. Die Suche nach einer Majorante/ Minorante ist nicht immer einfach:

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+n} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Reihe divergent, da die harmonische Reihe divergent ist.

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n+n^3} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{5})^n$$

Reihe konvergent, da die geometrische Reihe für $q = 1/5$ konvergent ist.

c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+1)}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)}$$

Reihe divergent, da die harmonische Reihe auch divergent ist, wenn das erste Gleid fehlt.

4. Konvergenz oder Divergenz mit geeignetem Kriterium:

a) Integralkriterium:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^s} dx = \int_1^{\infty} x^{-s} dx = \lim_{a\to\infty} [\frac{1}{1-s} x^{1-s}]_1^a$$

$$= \lim_{a\to\infty} \frac{1}{1-s} a^{1-s} - \frac{1}{1-s} = -\frac{1}{1-s} < \infty$$

für $s \geq 2$. Damit nach Integralkriterium konvergent.

b) Quotientenkriterium:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n} = \lim_{n\to\infty} (n+1)x = \infty$$

Die Reihe ist divergent.

c) Man erkennt die geometrische Reihe ohne ihr erstes Glied:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{-1}{3})^n < \infty$$

Hier ist $q = -1/3$, daher liegt Konvergenz vor.

d) Wurzelkriterium:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

Also konvergent.

e) Allgemeines Vergleichskriterium, Vergleich mit der konvergenten Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n(n^3+1)}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{1+1/n^3}} = 1$$

Also konvergent.

f) Leibnizkriterium:
Alternierende Reihe und $1/\sqrt{n}$ ist eine positive, streng monoton fallende Nullfolge, also konvergent.

5. Bestimmung des Konvergenzbereichs mit Randpunkten:

a) Konvergenzradius mit Wurzelkriterium:

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{4^n}}} = 4$$

Damit ist der Konvergenzbereich mindestens (-4,4). Die Randpunkte werden wie üblich durch Einsetzen behandelt:

$$x = 4 \to \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty$$

und

$$x = -4 \to \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$$

ebenfalls divergent, d.h. die beiden Randpunkte gehören nicht zum Konvergenzintervall, d.h. I=(-4,4).

b) Wurzel- oder Quotientenkriterium, r=3, in beiden Randpunkten divergent, I=(-3,3);

c) x_0=2, Wurzelkriterium:

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{3^n}} = \frac{1}{3}$$

Konvergenzbereich mindestens $(2-\frac{1}{3}, 2+\frac{1}{3})$. Randpunkte durch einsetzen:

$$x = 2 - \frac{1}{3} \curvearrowright \sum_{n=1}^{\infty} 3^n (2 - \frac{1}{3} - 2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{-3}{3})^n$$

divergent;

$$x = 2 + \frac{1}{3} \curvearrowright \sum_{n=1}^{\infty} 3^n (2 + \frac{1}{3} - 2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{3}{3})^n$$

divergent; Also Konvergenzbereich $I = (2 - \frac{1}{3}, 2 + \frac{1}{3})$.

d) Substitution $x^2 = z$, und für die Potenzreihe in z erhält man mit dem Wurzelkriterium

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{(2n)!}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(2n)!} = \infty$$

wo man hier den Hinweis zu den Lösungen beachtet. Die Reihe ist für alle $z \in \mathbb{R}$ konvergent, also auch für alle x.

e) Vorsicht: hier ist keine Substitution erkennbar, man greift daher auf das allgemeine Wurzelkriterium für Reihen zurück:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|x|^{(n^2)}}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{\frac{n^2}{n}}}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^n}{2} = \begin{cases} 0, & |x| < 1; \text{ konv.} \\ \frac{1}{2}, & |x| = 1;\text{konv.} \\ \infty, & |x| > 1; \text{ div.} \end{cases}$$

Also ist $r = 1$, und der Konvergenzbereich ist I=[-1, 1].

f) In Kurzform:

$$r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n n^2} = 3$$

I=(-4,2) mindestens; Randpunkte:

$$x = -4 \curvearrowright \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

$$x = 2 \curvearrowright \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Konvergent in beiden Randpunkten, I=[-4,2].

6. In beiden Fällen entwickelt man zuerst den Integranden in eine Taylorreihe nach $z = t^2$ (das ist viel einfacher) :

   a) Taylorreihe von $\frac{1}{\sqrt{1-z}}$ ist wie gelernt

$$f(z) = 1 + \frac{1}{2}z + \frac{\frac{1}{2}\frac{3}{2}}{2!}z^2 + \frac{\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}}{3!}z^3 \cdots$$

und nach einsetzen von $t^2 = z$

$$f(t^2) = 1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{\frac{1}{2}\frac{3}{2}}{2!}t^4 + \frac{\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}}{3!}t^6 \cdots$$

und damit nach termweiser Integration

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = x + \frac{1}{2 \cdot 3} t^3 + \frac{1 \cdot 3}{2!4 \cdot 5} t^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3!8 \cdot 7} t^7 \cdots$$

b) Die Taylorreihe von $\cos(z)$ sollte eigentlich bekannt sein:

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

Wieder mit $t^2 = z$ ergibt sich

$$\int_0^x \cos(t^2) dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{4n}}{(2n)!} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!}$$

5.2 Kapitel 2

1. Zum Beweis der Orthogonalitätsbeziehungen benutzt man folgende Spezialfälle:

a)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) dx = \frac{1}{m} [-\cos(mx)]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{m} [-(-1)^m - -(-1)^m] = 0, \; m \in \mathbb{Z}, m \neq 0$$

wobei hier $\cos(m\pi) = (-1)^m$ benutzt wurde und

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(0x) dx = 0, m = 0$$

b)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) dx = \frac{1}{m} [\sin(mx)]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{m} [\sin(m\pi) - sin(-m\pi)] = 0, \; m \in \mathbb{Z}, m \neq 0$$

und

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(0x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} 1 dx = 2\pi, m = 0$$

Damit berechnet man jetzt leicht unter Beachtung der trigonometrischen Identitäten für $n, k \in \mathbb{N}$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(kx) dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos((n-k)x) - \cos((n+k)x) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos((n-k)x) dx - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos((n+k)x) dx$$

$$= \begin{cases} 0, & n \neq k; \\ \pi, & n = k. \end{cases}$$

sowie

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(kx)dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos((n-k)x) + \cos((n+k)x)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos((n-k)x)dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos((n+k)x)dx = \begin{cases} 0, & n \neq k; \\ \pi, & n = k. \end{cases}$$

und

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cos(kx)dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin((n-k)x) + \sin((n+k)x)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin((n-k)x)dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin((n+k)x)dx = 0$$

2. Es ist

   $$\cos(k\pi) = (-1)^k,\ \sin(k\pi) = 0 \Rightarrow e^{jk\pi} = (-1)^k$$

   Das Ganze geht auch von rechts nach links wegen $e^{j\pi} = -1$ (Polardarstellung)

   Für $k = 0, 1, 2, \cdots$ ist

   $$\cos(k\pi/2) = 1, 0, -1, 0, 1\cdots$$

   $$\sin(k\pi/2) = 0, 1, 0, -1, 0\cdots$$

   $$e^{jk\pi/2} = 1, j, -1, -j, 1\cdots$$

   wobei man alles auch durch $e^{j\pi/2} = j$ sehen kann.

3. Die Funktion ist L-periodisch wegen

   $$h(x+L) = f(x+L)e^{\frac{j2\pi k(x+L)}{L}} = f(x)e^{\frac{j2\pi kx}{L}+j2\pi k} = h(x)$$

   da bekanntlich $e^{j2\pi k} = 1$ ist.

4. Zuerst die Reihe für $|\sin(x)|$: Da diese Funktion gerade ist, verschwinden alle Sinuskoeffizienten, und die Kosinuskoeffizienten lassen sich bekanntlich durch Integration über die halbe Periodenlänge berechen:

   $$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |\sin(x)|\cos(kx)dx$$

von 0 bis π ist der Sinus positiv, d.h. $|\sin(x)|=\sin(x)$, das ist der Trick hier. Damit folgt mit der üblichen trig. Identität

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin(x)\cos(kx)dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{1}{2}(\sin(x-kx)+\sin(x+kx))dx \\
&= \frac{1}{\pi}\frac{1}{1-k}[-\cos((1-k)x)]_0^\pi + \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+k}[-\cos((1+k)x)]_0^\pi \\
&= -\frac{1}{\pi}(\frac{1}{1-k}[\cos((1-k)\pi)-1] + \frac{1}{1+k}[\cos((1+k)\pi)-1])
\end{aligned}$$

(beachte jetzt $\cos((1\pm k)\pi) = -(-1)^k$)

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{\pi}(\frac{1}{1-k}[-(-1)^k-1] + \frac{1}{1+k}[-(-1)^k-1]) \\
&= \frac{1}{\pi}(-1^k+1)(\frac{1}{1-k}+\frac{1}{1+k}) \\
&= \frac{2}{\pi}\frac{1}{1-k^2}(-1^k+1) = a_k,\ k\neq 1
\end{aligned}$$

Schon der Übergang zur Stammfunktion erfordert $k \neq 1$, also muss der Sonderfall k=1 noch berechnet werden:

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{1}{2}\sin(2x)dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\cos(2\pi)}{2}\right]_0^\pi = 0$$

Nun ist der Term $(-1)^k+1$ abwechselnd 0 oder 2, d.h.

$$a_k = \frac{2}{\pi}\frac{1}{1-k^2}\begin{cases} 2, & k=2n \text{ gerade;} \\ 0, & k=(2n-1) \text{ ungerade.}\end{cases}$$

Damit folgt, dass nur Koeffizienten mit $k = 2n$ übrigbleiben, und da nach Dirichlet die Reihe überall gegen $|\sin(x)|$ konvergent ist, folgt

$$|sin(x)| = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-(2n)^2}\cos(2nx)$$

Für die Fourierreihe von $|\cos(x)|$ werden jetzt nicht alle Koeffizienten neu berechnet, sondern mit der Identität

$$|\cos(x)| = |\sin(x+\frac{\pi}{2})|$$

berechnet man mit der Fourierreihe von $|\sin(x)|$

$$|\cos(x)| = |\sin(x+\frac{\pi}{2})| = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-(2n)^2}\cos(2n(x+\frac{\pi}{2}))$$

$$= \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-(2n)^2} \cos(2nx + n\pi)$$

$$= \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-(2n)^2} \cos(2nx)$$

Die Koeffizienten unterscheiden sich nur durch einen Faktor $(-1)^n$.

5. a) Die Funktion ist gerade, also müssen die Sinuskoeffizienten nicht berechnet werden. Für die Kosinuskoeffizienten ergibt dann

$$a_k = 2 \int_0^1 x^2 \cos(\pi k x) dx$$

Das Integral kann mit partieller Integration gelöst werden. Empfehlenswert ist, erst das allgemeine Integral $\int x^2 \cos(\alpha x) dx$ zu lösen und dann $\alpha = \pi k$ einzusetzen. Das allgemeine Integral lautet

$$\int x^2 \cos(\alpha x) dx = \frac{x^2 \sin(\alpha x)}{\alpha} + \frac{2x \cos(\alpha x)}{\alpha^2} - \frac{2 \sin(\alpha x)}{\alpha^3} + C$$

Daher ergibt sich

$$a_k = 2[\frac{x^2 \sin(\pi k x)}{\pi k} + \frac{2x \cos(\pi k x)}{(\pi k)^2} - \frac{2 \sin(\pi k x)}{(\pi k)^3}]_0^1 = \frac{4}{(\pi k)^2}(-1)^k, \ k \neq 0$$

da beim Einsetzen der Grenzen fast alles wegfällt. Für den Sonderfall k=0 gilt

$$a_0 = 2 \int_0^2 x^2 dx = 2[\frac{x^3}{3}]_0^1 = \frac{2}{3}$$

Damit erhält man die nach Dirichlet überall konvergente Fourierreihe

$$\frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(\pi k)^2} (-1)^k \cos(\pi k x)$$

b) Hier ist keine Symmetrie erkennbar. Daher werden die komplexen Koeffizienten berechnet, und daraus dann die reellen. Mit dem Integrationsintervall von 0 bis 2 ist

$$c_k = \frac{1}{2} \int_0^2 x^2 e^{-j\pi k x} dx$$

Auch hier ist günstig die partielle Integration zuerst allgemein durchzuführen:

$$\int x^2 e^{\alpha x} dx = e^{\alpha x}(\frac{x^2}{\alpha} - \frac{2x}{\alpha^2} + \frac{2}{\alpha^3}) + C$$

und mit $\alpha = -j\pi k$ ergibt sich

$$c_k = \frac{1}{2}[e^{-j\pi kx}(\frac{x^2}{-j\pi k} - \frac{2x}{(-j\pi k)^2} + \frac{2}{(-j\pi k)^3})]_0^2$$
$$= \frac{2}{(\pi k)^2} + j\frac{2}{\pi k},\ k \neq 0$$

da wieder einige Terme verschwinden bzw. sich wegheben. Der Sonderfall k=0 ergibt

$$c_0 = \int_0^2 x^2 dx = \frac{4}{3}$$

Daraus ergibt sich mit den bekannten Formeln

$$a_0 = 2c_0 = \frac{8}{3};\ a_k = 2\,Re(c_k) = \frac{4}{(\pi k)^2};\ b_k = -2\,Im(c_k) = \frac{-4}{\pi k}$$

Damit ist die Fourierreihe gegeben durch

$$\frac{4}{3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{(\pi k)^2}\cos(\pi kx) + \frac{-4}{\pi k}\sin(\pi kx)$$

Die Fourierreihe konvergiert nach Dirichlet überall und außer in $x = 2k, k \in \mathbb{Z}$ gegen die Funktion.

6. Zuerst stellt man die Formel für $f(x)$ im Intervall $[0, T]$ auf:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{T}x, & 0 \leq x \leq \frac{T}{2}; \\ 0, & \frac{T}{2} < x \leq T. \end{cases}$$

Die komplexen Koeffizienten berechnen sich durch (Integration nur von 0 bis $\frac{T}{2}$)

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^{T/2}\frac{2}{T}e^{-j\frac{2\pi kx}{T}}dx$$

Unter Benutzung der durch partielle Integration gewonnenen Formel

$$\int xe^{\alpha x}dx = e^{\alpha x}(\frac{x}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2}) + C$$

ergibt sich mit $\alpha = -j\frac{2\pi k}{T}$

$$c_k = \frac{2}{T^2}[e^{-j\frac{2\pi k}{T}x}(\frac{x}{-j\frac{2\pi k}{T}} - \frac{1}{(-j\frac{2\pi k}{T})^2})]_0^{\frac{T}{2}} = 2\frac{(-1)^k - 1}{(2\pi k)^2} + j\frac{(-1)^k}{2\pi k},\ k \neq 0$$

da sich wieder einiges vereinfacht. Der Sonderfall k=0 wird zu

$$c_0 = \frac{1}{T}\int_0^{t/2}\frac{2}{T}xdx = \frac{2}{T^2}[\frac{x^2}{2}]_0^{T/2} = \frac{1}{4}$$

Damit berechnet man die reellen Koeffizienten als

$$a_0 = 2c_0 = \frac{1}{2},\ b_k = -2\,Im(c_k) = \frac{(-1)^{k+1}}{\pi k}$$

und

$$a_k = 2\,Re(c_k) = 4\frac{(-1)^k - 1}{(2\pi k)^2} = \begin{cases} -\frac{2}{(\pi k)^2}, & k = 2n-1 \text{ ungerade;} \\ 0, & k = 2n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Damit ist die Fourierreihe gegeben durch

$$\frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2}{(\pi(2n-1))^2}\cos(\frac{2\pi(2n-1)x}{T}) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{\pi k}\sin(\frac{2\pi k x}{T})$$

7. Man formt die Terme um, bis sie die Form einer Fourierreihe haben; die meisten Koeffizienten sind dabei =0, es werden nur die nichtverschwindenden aufgeführt:

   a)
   $$\cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x);\ a_0 = 1,\ a_2 = \frac{1}{2}$$
   und
   $$\sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x);\ a_0 = 1,\ a_2 = -\frac{1}{2}$$

   b) Man benutze zuerst $\sin(2x)\cos(2x) = \frac{1}{2}\sin(4x)$ und daher
   $$(\cos(3x) + \sin(4x) - \sin(2x)\cos(2x))^2 = (\cos(3x) + \frac{1}{2}\sin(4x))^2$$
   $$= \cos^2(3x) + \cos(3x)\sin(4x) + \frac{1}{4}\sin^2(4x)$$
   $$= \frac{1}{2}(1+\cos(6x)) + \frac{1}{2}(\sin(x) + \sin(7x)) + \frac{1}{8}(1 - \cos(8x))$$
   $$= \frac{5}{8} + \frac{1}{2}\sin(x) + \frac{1}{2}\sin(7x) - \frac{1}{8}\cos(8x)$$
   also
   $$a_0 = \frac{5}{4},\ b_1 = \frac{1}{2},\ a_6 = \frac{1}{2},\ b_7 = \frac{1}{2},\ a_8 = -\frac{1}{8}$$

8. Zuerst stellt man die Formel für $f(x)$ im Intervall $[0, T]$ auf:
   $$f(x) = \begin{cases} \frac{2A}{T}x, & 0 \le x < T/2; \\ A, & T/2 \le x < T. \end{cases}$$
   Zur Koeffizientenberechnung wird das Integral natürlich sinnvoll aufgeteilt:
   $$c_k = \frac{1}{T}\int_0^{T/2}\frac{2A}{T}xe^{\frac{-j2\pi k}{T}x}dx + \frac{1}{T}\int_{T/2}^{T}Ae^{\frac{-j2\pi k}{T}x}dx$$

Mit partieller Integration wie in (6) für das erste Integral ergibt sich

$$c_k = \frac{2A}{T^2}\left[e^{\frac{-j2\pi k}{T}x}\left(\frac{x}{\frac{-j2\pi k}{T}} - \frac{1}{(\frac{-j2\pi k}{T})^2}\right)\right]_0^{T/2} + \frac{A}{T}\left[\frac{e^{\frac{-j2\pi k}{T}x}}{\frac{-j2\pi k}{T}}\right]_{T/2}^{T}$$

$$= \frac{A}{2}((-1)^k(\frac{j}{\pi k} + \frac{1}{\pi^2 k^2}) - \frac{1}{\pi^2 k^2}) + \frac{A}{2}\frac{j}{\pi k}(1-(-1)^k), k \neq 0$$

und damit

$$c_k = \frac{A}{2}(\frac{1}{\pi^2 k^2}((-1)^k - 1) + j\frac{A}{2}\frac{j}{\pi k}$$

Der Sonderfall k=0 ergibt

$$c_0 = \frac{2A}{T^2}\int_0^{T/2} x dx + \frac{A}{T}\int_{T/2}^{T} 1 dx = \frac{A}{4} + \frac{A}{2} = \frac{3}{4}A$$

Damit erhält man die reellen Koeffizienten

$$a_0 = 2c_0 = \frac{3}{2}A,\ a_k = 2\,Re(c_k) = (\frac{A}{\pi^2 k^2}((-1)^k - 1),\ b_k = -2\,Im(c_k) = -\frac{A}{\pi k}$$

9. Mit dem richtigen Integrationsintervall berechnet man

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T (e^x - 1)e^{-j\frac{2\pi k}{T}x}dx = \frac{1}{T}\int_0^T (e^{x(1-j\frac{2\pi k}{T})} - e^{-j\frac{2\pi k}{T}x})dx$$

$$= \frac{1}{T}\left[\frac{e^{x(1-j\frac{2\pi k}{T})}}{1-j\frac{2\pi k}{T})}\right]_0^T - \frac{1}{T}\left[\frac{e^{-j\frac{2\pi k}{T}x}}{-j\frac{2\pi k}{T}}\right]_0^T$$

$$= \frac{1}{T}\frac{1}{1-j\frac{2\pi k}{T}}[e^T e^{-j2\pi k} - 1] - \frac{1}{T}\frac{1}{\frac{-j2\pi k}{T}}[1-1] = (e^T - 1)\frac{T + j2\pi k}{T^2 + (2\pi k)^2}, k \neq 0$$

Der Sonderfall k=0 ergibt

$$c_0 == \frac{1}{T}\int_0^T (e^x - 1)dx = \frac{1}{T}[e^x - x]_0^T = \frac{1}{T}(e^T - T - 1)$$

Damit ergeben sich die reellen Koeffizienten wie üblich als

$$a_0 = \frac{2}{T}(e^T - T - 1),\ a_k = (e^T - 1)\frac{2T}{T^2 + (2\pi k)^2},\ b_k = (e^T - 1)\frac{-j4\pi k}{T^2 + (2\pi k)^2}$$

10. Die Berechnung von Integralen dieses Typs wird stark vereinfacht, wenn man die Exponentialdarstellung des Sinus benutzt (ebenso fur Cosinus, Sinh, Cosh) :

$$\sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j},\ \cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$$

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\ \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Damit berechnet man die Koeffizienten ohne partielle Integration als

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(2x)e^x e^{-jkx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{2jx} - e^{-2jx}}{2j} e^x e^{-jkx}dx$$

$$= \frac{1}{4j\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{x(j(2-k)+1)} - e^{x(j(-2-k)+1)}dx = \frac{1}{4j\pi}\left[\frac{e^{x(j(2-k)+1)}}{j(2-k)+1} - \frac{e^{x(j(-2-k)+1)}}{j(-2-k)+1}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{4j\pi}\left[\frac{e^{\pi(j(2-k)+1)} - e^{-\pi(j(2-k)+1)}}{j(2-k)+1} - \frac{e^{\pi(j(-2-k)+1)} - e^{-\pi(j(-2-k)+1)}}{j(-2-k)+1}\right]$$

$$= \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{4j\pi}(-1)^k\left[\frac{1}{j(2-k)+1} - \frac{1}{j(-2-k)+1}\right]$$

$$= \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{4j\pi}(-1)^k\frac{-4j}{(-1)(k^2-4) - j2k + 1}$$

$$= \frac{e^{-\pi} - e^{\pi}}{\pi}(-1)^k\frac{5 - k^2 + j(2k)}{(5-k^2)^2 + 4k^2}$$

Hier gibt es keinen Sonderfall (das ist also auch möglich!). Damit ergeben sich die reellen Koeffizienten als

$$c_0 = 2\frac{e^{-\pi} - e^{\pi}}{5\pi},\ a_k = 2\frac{e^{-\pi} - e^{\pi}}{\pi}(-1)^k\frac{5-k^2}{(5-k^2)^2+4k^2},$$

$$b_k = -2\frac{e^{-\pi} - e^{\pi}}{\pi}(-1)^k\frac{2k}{(5-k^2)^2+4k^2}$$

5.3 Kapitel 3

1.

$$S(f)^* := \left(\int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j2\pi ft}dt\right)^* = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)^* e^{+j2\pi ft}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j2\pi(-f)t}dt := S(-f)$$

da $s(t)^* = s(t)$ für reelle $s(t)$.

2. a) Das ist sehr einfach:

$$s_g(-t) = \frac{s(-t) + s(--t)}{2} = \frac{s(t) + s(-t)}{2} = s_g(t)$$

$$s_u(-t) = \frac{s(-t) - s(--t)}{2} = -\frac{s(t) - s(-t)}{2} = -s_u(t)$$

$$s_g(t) + s_u(t) = \frac{s(t) + s(-t)}{2} + \frac{s(t) - s(-t)}{2} = s(t)$$

b) Mit dem Spiegelungssatz, Aufgabe 1, den Rechenregeln für komplexe Zahlen und der Eulerformel folgt

$$s_g(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{S(f)+S(-f)}{2} = \frac{S(f)+S^*(f)}{2} = \frac{2Re(S(f))}{2}$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\cos 2\pi f t)dt = S_{cos}(f)$$

Das letzte Integral ist auch als Fourier-Cosinustransformation bekannt.

$$s_u(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{S(f)-S(-f)}{2} = \frac{S(f)-S^*(f)}{2} = \frac{2jIm(S(f))}{2}$$
$$= -j\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\sin 2\pi f t)dt = -jS_{sin}(f)$$

Das letzte Integral ist auch als Fourier-Sinustransformation bekannt.
In älteren Büchern wird die Fourier-Transformierte über die Sinus- und Cosinustransformierte eingeführt. Bewiesen wurde gerade der Zusammenhang

$$s(t) = s_g(t) + s_u(f) \circ\!\!-\!\!\bullet S_{cos}(f) - jS_{sin}(f)$$

c)

$$\frac{e^t+e^{-t}}{2} = \cosh(t); \ \frac{e^t-e^{-t}}{2} = \sinh(t)$$

3. a) $s(t) = \triangle(t)$ ist gerade, daher nach Aufg.2

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \triangle(t)\cos(2\pi f t)dt = 2\int_0^{\infty} \triangle(t)\cos(2\pi f t)dt$$
$$= 2\int_0^1 (1-t)\cos(2\pi f t)dt$$

Das Integral löst man wie üblich partiell mit

$$\int (1-t)\cos(\alpha t)dt = (1-t)\frac{\sin(\alpha t)}{\alpha} - \frac{\cos(\alpha t}{\alpha^2} + C$$

d.h

$$S(f) = 2\left[(1-t)\frac{\sin(2\pi f t)}{2\pi f} - \frac{\cos(2\pi f t}{(2\pi f)^2}\right]_0^1 = 2(\frac{1-\cos(2\pi f)}{(2\pi f)^2}$$
$$= 2\frac{2\sin^2(\pi f}{(2\pi f)^2} = \frac{\sin^2(\pi f)}{(\pi f)^2}$$

Hier wurde die trig. Id. $2\sin(x)^2 = 1-\cos(2x)$ benutzt.

b) Mit der trig. Id. $\cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$ und da $\cos(x)$ gerade erhält man

$$S(f) = \int_{-T_0}^{T_0} (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(\frac{\pi t}{T_0}))\cos(2\pi f t)dt$$
$$= 2\int_0^{T_0} (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(\frac{\pi t}{T_0}))\cos(2\pi f t)dt$$
$$= \int_0^{T_0} \cos(2\pi f t)dt + \frac{1}{2}\int_0^{T_0} (\cos(\frac{\pi t}{T_0} - 2\pi f t) + \cos(\frac{\pi t}{T_0} + 2\pi f t)dt$$
$$= \frac{1}{2\pi f}[\sin(2\pi f t)]_0^T + \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(\frac{\pi t}{T_0} - 2\pi f t)}{\frac{\pi}{T_0} - 2\pi f} + \frac{\sin(\frac{\pi t}{T_0} + 2\pi f t)}{\frac{\pi}{T_0} + 2\pi f}\right]_0^{T_0}$$
$$= \frac{\sin(2\pi f T_0}{2\pi f} + \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(\pi - 2\pi f T_0)}{\frac{\pi}{T_0} - 2\pi f} + \frac{\sin(\pi + 2\pi f T_0)}{\frac{\pi}{T_0} + 2\pi f}\right)$$

Wenn man das noch mit $\frac{T_0}{T_0}$ erweitert und die *si*-Funktion erkennt, kommt man auf die übliche Form

$$S(f) = T_0(si(2\pi f T_0) + \frac{1}{2}(si(2\pi T_0(f - \frac{1}{2T_0})) + si(2\pi T_0(f + \frac{1}{2T_0})))$$

4. Anstatt a) - c) mit Integralsubstitution zu beweisen, was auch geht, kommt man schneller mit dem Faltungssatz und den Rechenregeln der Fouriertransformation zum Ziel:

a)

$$(s_1 \star s_2)(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, S_1(f)S_2(f) = S_2(f)S_1(f) \bullet\!\!-\!\!\circ\, (s_2 \star s_1)(t)$$

b)

$$(s_1 \star (s_2 \star s_3))(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, S_1(f)(S_2(f)S_3(f))$$
$$= (S_1(f)S(2)(f))S_3(f) \bullet\!\!-\!\!\circ\, ((s_1 \star s_2) \star s_3)(t)$$

c)

$$(s_1 \star (s_2 + s_3)(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, S_1(f)(S_2(f) + S_3(f))$$
$$= S_1(f)S_2(f) + S_1(f)S_3(f) \bullet\!\!-\!\!\circ\, (s_1 \star s_2)(t) + (s_1 \star s_3)(t)$$

d) Hier geht es besser mit der Integraldefinition:

$$(s_1 \star c)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t')c dt' = c\int_{-\infty}^{\infty} s_1(t')dt' = cS_1(0)$$

5. Hier geht es auch am Einfachsten mit dem Faltungssatz:

a) Aus der Formelsammlung entnimmt man

$$e^{\frac{-t^2}{2c^2}} \circ\!\!-\!\!\bullet\ c\sqrt{2\pi}e^{-2(\pi f)^2 c^2}$$

und damit

$$e^{\frac{-t^2}{2a^2}} \star e^{\frac{-t^2}{2b^2}} \circ\!\!-\!\!\bullet\ a\sqrt{2\pi}e^{-2(\pi f)^2 a^2} b\sqrt{2\pi}e^{-2(\pi f)^2 b^2}$$

$$= ab(2\pi)e^{-2(\pi f)^2(a^2+b^2)} \bullet\!\!-\!\!\circ\ \sqrt{2\pi}\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}e^{\frac{-t^2}{2(a^2+b^2)}},$$

wobei die Berechnung der inversen Transformation mit etwas ausprobieren leicht geht. Damit erhält man das gewünschte Ergebnis

$$e^{\frac{-t^2}{2a^2}} \star e^{\frac{-t^2}{2b^2}} = \sqrt{2\pi}\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}e^{\frac{-t^2}{2(a^2+b^2)}}$$

Die Faltung zweier Gaußfunktionen ergibt wieder eine Gaußfunktion.

b) Mit Aufgabe 3 a) erhält man sofort wegen $rect(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ si(\pi f)$

$$rect(t) \star rect(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ si(\pi f)si(\pi f) = si^2(\pi f) \bullet\!\!-\!\!\circ\ \triangle(t)$$

a) Es ist nach Tabelle

$$\cos(2\pi f_0 t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{2}\{\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)\};$$

$$\sin(2\pi f_0 t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{2j}\{\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)\}$$

Wenn man $f_0 = \frac{1}{2\pi}$ setzt, erhält man sofort

$$\cos(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{2}\{\delta(f-\frac{1}{2\pi})+\delta(f+\frac{1}{2\pi}\}; \ \sin(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{2j}\{\delta(f-\frac{1}{2\pi})-\delta(f+\frac{1}{2\pi})\}$$

b) Mit den bekannten trigonometrischen Identitäten findet man leicht

$$\sin^2(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2\pi 2 f_0 t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{2}\delta(t)-\frac{1}{4}\{\delta(f-2f_0)\delta(f+2f_0)\}$$

$$\cos^2(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2\pi 2 f_0 t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{2}\delta(t)+\frac{1}{4}\{\delta(f-2f_0)\delta(f+2f_0)\}$$

Quadrieren erzeugt Frequenzverdoppelung...

c) Es geht natürlich mit trigonometrischen Identitäten, aber hier wird der Multiplikationssatz benutzt:

$$cos(2\pi f_1 t)\sin(2\pi f_2 t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{2}\{\delta(f-f_1)+\delta(f+f_1)\}\star\frac{1}{2j}\{\delta(f-f_2)-\delta(f+f_2)\}$$

$$= \frac{1}{4j}\{\delta(f-f_1)\star\delta(f-f_2)+\delta(f-f_1)\star-\delta(f+f_2)$$
$$+\delta(f+f_1)\star\delta(f-f_2)+\delta(f+f_1)\star-\delta(f+f_2)\}$$

$$= \frac{1}{4j}\{\delta(f-(f1+f2))-\delta(f-(f1-f_2))+\delta(f+(f_1-f2))-\delta(f+(f1+f2))\}$$

nach den Rechenregeln für die Faltung von δ-Funktionen.

6. Mit der Abbildung zweier Rechteckfunktionen der Höhe 1 und Breite $2a$ bzw. $2b$ überlegt man sich leicht, dass bei ihrer Multiplikation die kürzere von beiden übrigbleibt. Damit erhält man nach dem Faltungssatz

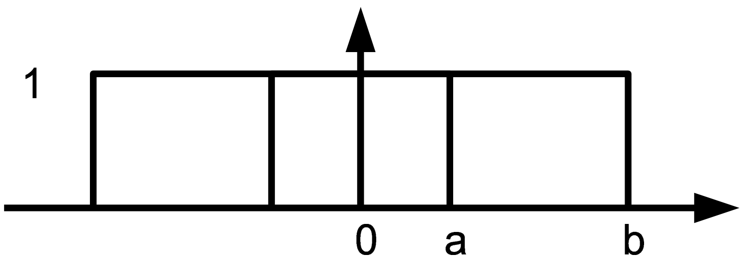

Abbildung 5.1: Zwei Rechteckfunktionen

$$si(\pi x)\star si(\pi x) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; rect(f)rect(f) = rect(f) \;\bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\circ\; si(\pi x)$$

also

$$si(\pi x)\star si(\pi x)si(\pi x)$$

sowie

$$4si(\pi 4x)\star si(x) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; rect(\frac{f}{4})\pi rect(\pi f) = \pi rect(\pi f) \;\bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\circ\; si(x)$$

also

$$si(\pi 4x)\star si(x) = si(x)$$

und

$$si(ax)\star si(ax) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; \frac{\pi}{|a|}rect(\frac{\pi}{a}f)\frac{\pi}{|a|}rect(\frac{\pi}{a}f)$$

$$= \frac{\pi}{|a|}\frac{\pi}{|a|} rect(\frac{\pi}{a}f) \bullet\!\!-\!\!\circ \frac{\pi}{|a|} si(ax)$$

daher

$$si(ax) \star si(ax) = \frac{\pi}{|a|} si(ax)$$

7. Das geht natürlich auch mit Berechnung des Integrals. Eleganter ist der folgende Weg. Aus Kapitel xx weiß man

$$\frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}}, t \geq 0 \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{1 + j2\pi fT}$$

bzw

$$s_1(t) = e^{-\frac{t}{T}}, t \geq 0 \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{T}{1 + j2\pi fT}$$

Der Spiegelungssatz liefert nun

$$s_2(t) = e^{\frac{t}{T}}, t < 0 \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{T}{1 - j2\pi fT}$$

Damit kann man die gewünschte Transformierte zusammensetzen:

$$e^{-\frac{|t|}{T}} = s_1(t) + s_2(t) = \frac{T}{1 + j2\pi f} + \frac{T}{1 - j2\pi f} = \frac{2T}{1 + (2\pi fT)^2}$$

Für die modulierte Funktion liefert der Modulationssatz

$$e^{-\frac{|t|}{T}} \cos(2\pi f_0 t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{T}{1 + (2\pi T(f - f_0))^2} + \frac{T}{1 + (2\pi T(f + f_0))^2}$$

8. a) In der letzten Aufgabe hatte man

$$e^{-\frac{|t|}{T}} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{2T}{1 + (2\pi fT)^2}$$

Da es sich um gerade Funktionen handelt, liefert der Symmetriesatz

$$\frac{2T}{1 + (2\pi tT)^2} \circ\!\!-\!\!\bullet e^{-\frac{|f|}{T}}$$

Setzt man hier $T = \frac{1}{2\pi}$, erhält man

$$\frac{\frac{1}{\pi}}{1 + t^2} \circ\!\!-\!\!\bullet e^{-2\pi|f|}$$

und daraus

$$\frac{1}{1 + t^2} \circ\!\!-\!\!\bullet \pi e^{-2\pi|f|}$$

b) Hier muss das Integral angesetzt werden:

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j2\pi ft}dt = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}(\cos(2\pi ft) - j\sin(2\pi ft))dt$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}\cos(2\pi ft)dt - j\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}\sin(2\pi ft)dt$$

Mit der Substitution $t = \frac{x}{2\pi f}$ wird $dt = \frac{dx}{2\pi f}$ und für die Integrationsgrenzen gilt $0 \curvearrowright 0$, $\infty \curvearrowright \infty$ und

$$S(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi f}}\int_0^{\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}dx - j\frac{1}{\sqrt{2\pi f}}\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}dx = \frac{1}{\sqrt{4f}} - j\frac{1}{\sqrt{4f}}$$

wobei hier der Hinweis in der Aufgabenstellung benutzt wurde.

9. Hier benutzt man am besten den Transformationssatz in der Form

$$s(\alpha(t-t_0)) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{|\alpha|}S(\frac{f}{\alpha})e^{-j2\pi t_0 f},$$

da so Skalierung und Verschiebung schön getrennt sind.

a) Zwei verschobene und skalierte Rechtecke transformieren sich sehr einfach:

$$s(t) = rect(t-2.5)+2rect(\frac{1}{2}(t-5)) \circ\!\!-\!\!\bullet si(\pi f)e^{-j2\pi 2.5f}+2\cdot 2si(\pi 2f)e^{-j2\pi 5f}$$

wobei man die Faktoren dann noch ausmultiplizieren könnte.

b) Man setzt dieses Haus aus Rechtecken und Dreiecken zusammen (das ist natürlich auf viele Weisen möglich):

$$s(t) = \sum_{i=1}^{6} s_i(t) = rect(\frac{1}{4}(t-3))+rect(t-1.5)+rect(t-4.5)+\triangle(2(t-1.5))$$

$$+\triangle(2(t-4.5)) + \triangle(t-3)$$

und daher

$$S(f) = 4si(4\pi f)e^{-j2\pi 3f} + si(\pi f)e^{-j2\pi 1.5f} + si(\pi f)e^{-j2\pi 4.5f}$$

$$+\frac{1}{2}si^2(\frac{1}{2}\pi f)e^{-j2\pi 1.5f} + \frac{1}{2}si^2(\frac{1}{2}\pi f)e^{-j2\pi 4.5f} + si^2(\pi f)e^{-j2\pi 3f}$$

Die Faktoren kann man so stehen lassen, da sich die Verschiebung und Skalierung dann leichter erkennen lässt.

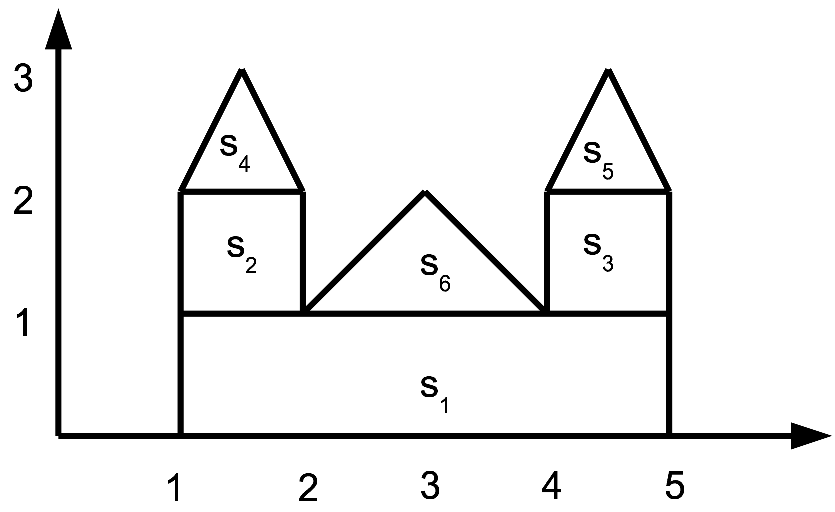

Abbildung 5.2: Eine mögliche Zerlegung

10. Nach dem Spiegelungs- und Konjugationssatz ist

$$s^*(-t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, S^*(f)$$

Damit ist einerseits

$$s(t) \star s^*(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(x)s^*(x-t)dx$$

andererseits

$$s(t) \star s^*(-t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, S(f)S^*(f) = |S(f)|^2$$

bzw. nach Definition des Fourier-Integrals bedeutet das

$$s(t) \star s^*(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 e^{j2\pi ft} df$$

Setzt man nun $t = 0$, so folgt sofort

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} s(x)s^*(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df$$

Das ist der Satz von Parseval. Er bedeutet, dass die Energie eines Signals in Zeit- und Frequenzbereich gleich ist.

11. Zur Berechnung der Abtastfrequenz braucht man die Grenzfrequenz; dazu ist jeweils die Berechnung des Spektrums gefragt, und eine Skizze ist stets hilfreich.

a)

$$s_(t) = si^2(4\pi t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{4}\triangle(\frac{1}{4}f)$$

Da die Standard-Dreiecksfunktion die Breite 2 hat, hat die vorliegende Dreiecksfunktion die Breite 8. Daher ist f_g=4, und

$$f_a \geq 2 \cdot 4 = 8 \Rightarrow \triangle t = \frac{1}{f_a} \leq \frac{1}{8}$$

b) Mit Hilfe der Tabelle berechnet man

$$s_2(t) = e^{-\frac{t^2}{8}} = e^{-\frac{t^2}{2(2)^2}} \circ\!\!-\!\!\bullet \sqrt{2\pi}2e^{-\frac{f^2}{2(\frac{1}{4\pi})^2}}$$

Das ist wieder eine Gaussfunktion mit $a_f = \frac{1}{2\pi a} = \frac{1}{4\pi}$ Die Transformierte hat also die Amplitude $\sqrt{2\pi}$ und technisch die Breite $6\frac{1}{4\pi}$. Die Grenzfrequenz ist also $\frac{3}{4\pi}$ und

$$f_a \geq 2f_g = \frac{3}{2\pi} \Rightarrow \triangle t \leq \frac{2\pi}{3}$$

c) Hier hat man direkt

$$\cos(2\pi f_0 t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{2}\{\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\}$$

Hier ist $f_g = f_0$ und daher

$$f_a > 2f_0 \Rightarrow \triangle t < \frac{1}{2f_0}$$

d) Mit der üblichen trig. Id. folgt sofort

$$\sin^2(2\pi f_0 t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{2}\delta(0) - \frac{1}{4}\{\delta(f - 2f_0) + \delta(f + 2f_0)\}$$

$$f_g = 2f_0 \Rightarrow f_a > 2f_g = 2f_0 \Rightarrow \triangle t < \frac{1}{4f_0}$$

e) Mit den bekannten Rechenregeln folgt

$$s_1(t)s_3(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{4}\triangle(\frac{1}{4}f) \star \frac{1}{2}\{\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\}$$

$$= \frac{1}{8}\{\triangle(\frac{1}{4}(f - f_0)) + \triangle(\frac{1}{4}(f + f_0))\}$$

Damit wird

$$f_g = 4 + f_0 \Rightarrow f_a \geq 8 + 2f_0 \Rightarrow \triangle t < \frac{1}{8 + 2f_0}$$

f) Hier ist

$$s_2(t)s_4(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \, (\frac{1}{2}\delta(0) - \frac{1}{4}\{\delta(f-2f_0) + \delta(f+2f_0)\})$$

$$\star\sqrt{2\pi}2e^{-\frac{f^2}{2(\frac{1}{4\pi})^2}}$$

$$= \sqrt{2\pi}e^{-\frac{f^2}{2(\frac{1}{4\pi})^2}} - \frac{1}{2}\{\sqrt{2\pi}e^{-\frac{(f-2f_0)^2}{2(\frac{1}{4\pi})^2}} + \sqrt{2\pi}e^{-\frac{(f+2f_0)^2}{2(\frac{1}{4\pi})^2}}\}$$

Damit wird

$$f_g = 2f_0 + \frac{3}{4\pi} \Rightarrow f_a \geq 4f_0 + \frac{3}{2\pi} \Rightarrow \triangle t < \frac{1}{4f_0 + \frac{3}{2\pi}}$$

5.4 Kapitel 4

1. a) Aus RUDERREGATTA kann man

$$\frac{12!}{3!2!2!2!} = \frac{11!}{4} = 9979200$$

Worte bilden.

b) Beim Skat bekommt z. B. der 1. Spieler 10 Karten (deren Reihenfolge unwichtig ist), dann der 2. 10 Karten, dann der 3. 10 Karten, die letzten beiden Kartten bilden den Skat. Es gibt daher

$$\binom{32}{10}\binom{22}{10}\binom{12}{10}\binom{2}{2} = \frac{32!22!12!}{22!10!12!10!2!10!} = \frac{32!}{10!10!10!2!} \approx 2.75 \cdot 10^{15}$$

Möglichkeiten.

c) Der Student hat (1) insgesamt $\binom{13}{10}$ Möglichkeiten und wenn (2) die ersten beiden Aufgaben festliegen $\binom{11}{8}$. Wenn er (3) genau eine der ersten beiden lösen muss hat er $\binom{2}{1}\binom{11}{9}$ Möglichkeiten, wenn er (4) genau 3 der ersten 5 lösen muss $\binom{5}{3}\binom{8}{7}$, und (5) mindesten 3 der ersten 5 heißt entweder genau 3 oder genau 4 oder genau 5 der ersten 5, also

$$\binom{5}{3}\binom{8}{7} + \binom{5}{4}\binom{8}{6} + \binom{5}{5}\binom{8}{5}$$

Möglichkeiten.

2. a)

$$\Omega = \{(Z,1),(Z,2)\cdots(Z,6),(W,1),(W,2)\cdots(W,6)\}$$

b)

$$A = \{(Z,2),(Z,4),(Z,6)\}$$

$$B = \{(Z,2),(Z,3),(Z,5),(W,2),(W,3),(W,5)\}$$

$$C = \{(W,1),(W,3),(W,5)$$

c) (i)

$$A + B = A \bigcup B$$

$$= \{(Z,2),(Z,3),(Z,4),(Z,5),(Z,6),(W,2),(W,3),(W,5)\}$$

(ii)

$$BC = B \bigcap C = \{(W,3),(W,5)\}$$

d) Da nur $A \bigcap C = \emptyset$ schliessen sich nur A und C gegenseitig aus.

3. Die Lösungen sind leicht nach Laplace zu berechnen:

a) Alle Zahlen sind gleichwahrscheinlich, für gerade Zahl sind 3 Ergebnisse günstig, also

$$P = \frac{\text{Anzahl günstiger Fälle}}{\text{Anzahl möglicher Fälle}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

b) Da es 4 Könige gibt, ist $P = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

c) Es gibt 8 gleichwahrscheinliche Fälle, bei 7 davon liegt mindestesns einmal Wappen oben, d.h. $P = \frac{7}{8}$

d) $P = \frac{4}{4+3+5} = \frac{1}{3}$

4. Nach Laplace ist wieder

a) $P = \frac{4}{5+4+8} = \frac{2}{9}$

b) $P = \frac{1}{18}$

c) Da die Ereignisse disjunkt sind, ist

$$P(D \bigcup B) = P(D) + P(B) = \frac{8}{18} + \frac{1}{18} = \frac{1}{2}$$

5. Man nimmt als Ereignisse A=(Person ist Schüler) und B=(Person hat braune Augen). Dann folgt mit der einfachen Rechenregel

$$P(A \bigcup B) = P(A) + P(B) - P(A \bigcap B) = \frac{10}{30} + \frac{15}{30} - \frac{5}{30} = \frac{2}{3}$$

Das hätte man auch durch Abzählen erhalten können.

6. Man kann die Aufgabe kombinatorisch oder mit bedingten Wahrscheinlichkeiten lösen

   a) Kombinatorisch: Es gibt $\binom{15}{3}$ Moglichkeiten, aus 15 Birnen 3 auszuwählen. Aus 10 heilen 3 auszuwählen gibt $\binom{10}{3}$ Möglichkeiten. Daher ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

   $$P = \frac{\binom{10}{3}}{\binom{15}{3}} = \frac{24}{91}$$

   Mit $K_i =$ (Bei der i-ten Entnahme nichtdefekte Birne) ergibt sich nach dem Multiplikationssatz

   $$P = P(K_1K_2K_3) = P(K_1)P(K_2|K_1)P(K_3|K_1K2) = \frac{10}{15}\frac{9}{14}\frac{8}{13} = \frac{24}{91}$$

   b) Es gibt 5 Möglichkeiten, eine defekte Birne auszuwählen, und zu jeder dieser Möglichkeiten $\binom{10}{2}$ Paare von heilen Birnen. Damit ist

   $$P == \frac{5\binom{10}{2}}{\binom{15}{3}} = \frac{45}{91}$$

   Mit bedingten Wahrscheinlichkeiten ist der Fall gefragt, dass entweder genau die 1. oder die 2. oder die 3. Birne defekt ist, also mit dem Multiplikationssatz wie oben

   $$\begin{aligned} P &= P(K_1N_2N_3) + P(N_1K_2N_3) + P(N_1N_2K_3) \\ &= \frac{5 \cdot 10 \cdot 9}{15 \cdot 14 \cdot 13} + \frac{10 \cdot 5 \cdot 9}{15 \cdot 14 \cdot 13} + \frac{10 \cdot 9 \cdot 5}{15 \cdot 14 \cdot 13} = \frac{45}{91} \end{aligned}$$

   c) Hier hilft die Rechenregel und (a)

   $$P(\text{mindestens eine defekt}) = 1 - P(\text{keine defekt}) = 1 - \frac{24}{91} = \frac{67}{91}$$

7. a) Es liegt bekanntlich ein Laplace-Experiment vor mit $|\Omega| = 36$. Es ist

   $$A = (\text{Augensumme} \geq 10) = \{(6,4),(6,5),(6,6),(5,5),(5,6),(4,6)\}$$

   $$\Rightarrow |A| = 6,\ P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

   b) $B = (5 \text{ erscheint auf dem 1. Würfel})$ und $P(B) = \frac{1}{6}$; es ist

   $$P(A \bigcap B) = \frac{|\{(5,5),(5,6)\}|}{36} = \frac{1}{18} \Rightarrow P(A|B) = \frac{P(A \bigcap B)}{P(B)} = \frac{1}{3}$$

c) Hier ist $B = \{(5,1), \cdots (5,4), (1,5), \cdots (4,5), (5,5), (6,5), (5,6)\}$, daher $P(B) = \frac{11}{36}$ und

$$P(A \bigcap B) = \frac{|\{(5,6),(5,5),(6,5)\}|}{36} = \frac{3}{36} \Rightarrow P(A|B) = \frac{P(A \bigcap B)}{P(B)} = \frac{3}{11}$$

a) Es ist $|\Omega| = 8$ und $A = \{(ZZZ)\}$ sowie $B = \{(ZZZ), (ZZW), (ZWZ), (ZWW)\}$, also $P(B)\frac{1}{2}$. Daher ist

$$P(A \bigcap B) = \frac{|\{(ZZZ)\}|}{8} = \frac{1}{8} \Rightarrow P(A|B) = \frac{P(A \bigcap B)}{P(B)} = \frac{1}{4}$$

b) Hier ist$B = \Omega \backslash \{(WWW)\}$ und $P(B) = \frac{7}{8}$, also

$$P(A \bigcap B) = \frac{|\{(ZZZ)\}|}{8} = \frac{1}{8} \Rightarrow P(A|B) = \frac{P(A \bigcap B)}{P(B)} = \frac{1}{7}$$

8. Man nimmt als Ereignisse M=(in Mathematik durchgefallen) und C=(in Chemie durchgefallen. Dann ist

   a)
   $$P(C) = \frac{15}{100}, P(M \bigcap C) = \frac{10}{100} \Rightarrow P(M|C) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

   b)
   $$P(M) = \frac{25}{100} \Rightarrow P(C|M) = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$$

   c)
   $$P(M \bigcup C) = P(M) + P(C) - P(M \bigcap C) = \frac{3}{10}$$

9. Mit R_i = rot / W_i = weiss bei der i-ten Ziehung ergibt der Multiplikationssatz

$$P(R_1 R_2 W_3) = P(R_1)P(R_2|R_1)P(W_3|R_1 R_2) = \frac{7}{10}\frac{6}{9}\frac{3}{8} = \frac{7}{40}$$

10. Hier muss sorgfältig gearbeitet werden, damit man Wahrscheinlichkeiten nach Laplace erhält:

    a) Unter der Berücksichtigung der Reihenfolge der Geburten erhält man bei drei Kindern

$$\Omega = \{(JJJ), (MJJ), (JMJ), (JJM),$$

$$(JMM), (MJM), (MMJ), (MMM)\}$$

mit lauter gleichwahrscheinlichen Elementarereignissen. Es ist

$$A = \{(MJJ), (JMJ), (JJM), (JMM), (MJM), (MMJ)\}$$

$$P(A) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$B = \{(JMM), (MJM), (MMJ), (MMM)\};\ P(B) = \frac{1}{2}$$

$$A \bigcap B = \{(JMM), (MJM), (MMJ)\}; P(A \bigcap B) = \frac{3}{8}$$

$$P(A)P(B) = \frac{3}{4}\frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

Also sind A und B unabhängig!

b) Hier ist

$$\Omega = \{(JJ), (JM), (MJ), (MM)\};\ A = \{(JM), (MJ)\}, P(A) = \frac{1}{2}$$

$$B = \{(JM), (MJ), (MM)\};\ P(B) = \frac{3}{4};\ A \bigcap B = \{(JM), (MJ)\}$$

$$P(A \bigcap B) = \frac{1}{2} \neq P(A)P(B) = \frac{3}{8}$$

Hier sind A und B abhängig. Das zeigt, wie vorsichtig man sein muss, wenn es um bedingte Wahrscheinlichkeiten geht.

11. Sei D=(Stück ist defekt). Man berechnet zuerst mit dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit $P(D)$, da man dies weiter unten braucht:

$$P(D) = P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B) + P(D|C)P(C)$$

$$= \frac{2}{100}\frac{60}{100} + \frac{3}{100}\frac{30}{100} + \frac{5}{100}\frac{10}{100} = \frac{26}{1000} = 2.6\%$$

a) Regel von Bayes:

$$P(C|D) = \frac{P(D|C)P(C)}{P(D)} = \frac{\frac{5}{100}\frac{10}{100}}{\frac{26}{1000}} = \frac{5}{26}$$

b) Ebenso

$$P(A|D) = \frac{P(D|A)P(A)}{P(D)} = \frac{\frac{2}{100}\frac{60}{100}}{\frac{26}{1000}} = \frac{6}{13}$$

12. Mit selbsterklärenden Bezeichnungen ergibt die Regel von Bayes

$$P(W|180+) = \frac{P(180+|W)P(W)}{P(180+|W)P(W) + P(180+|M)P(M)}$$

$$= \frac{\frac{1}{100}\frac{60}{100}}{\frac{1}{100}\frac{60}{100} + \frac{4}{100}\frac{40}{100}} = \frac{3}{11}$$

13. Der Multiplikationssatz für bedingte Wahrscheinlichkeiten liefert

$$P(J_1J_2J_3) = P(J_1)P(J_2|J_1)P(J_3|J_1J_2) = \frac{12}{16}\frac{11}{15}\frac{10}{14} = \frac{11}{28}$$

14. a) Hier kann man nach Laplace berechnen, dass es 6 gunstige und 6^6 mögliche Ereignisse gibt, daher $P(A) = \frac{1}{6^5}$.

    b) Hier sind die 6! Permutationen von (123456) günstig, also $P(B) = \frac{6!}{6^6} = \frac{5!}{6^5}$

15. Mit $A_i =$ (i-ter PC defekt) und den Eigenschaften unabhängiger Wahrscheinlichkeiten ist

$$P = 1-P(\overline{A_1A_2}\cdots\overline{A_8}) = 1-P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})\cdots P(\overline{A_8}) = 1-(0.9)^8 = 0.57$$

16. a) Mit A_i=(Erfolg im i-ten Versuch) ist

$$P = 1 - P(\overline{A_1A_2}\cdots\overline{A_{10}}) = 1 - P(\overline{A_1}P(\overline{A_2})\cdots P(\overline{A_{10}})$$

$$= 1 - (0.8)^10 = 0.8926$$

    b)

$$0.9 \leq 1 - (0.8)^n \Rightarrow (0.8)^n \geq 0.1 \Rightarrow n \geq \frac{\ln(0.1)}{\ln(0.8)} = 10.3189$$

    Man muss also mindestens 11 mal den Versuch ausführen.

17. a) Mit $A_i =$ (i-tes Teil nicht defekt) folgt mit dem Multiplikationssatz für bedingte Wahrscheinlichkeiten (da ohne Zurücklegen)

$$P(A_1A_2\cdots A_{10}) = P(A_1)P(A_2|A_1)\cdots P(A_{10}|A_1\cdots A_9)$$

$$= \frac{975}{1000}\frac{974}{999}\cdots\frac{966}{991} = 0.77542$$

    b) Wegen der Unabhängigkeit beim Zurücklegen ist hier

$$P(A_1A_2\cdots A_{10}) = (\frac{975}{1000})^{10} = 0.77633$$

18. Mit den bekannten Formeln berechnet man leicht

    a)

$$\mu = \sum x_i f(x_i) = 2\frac{1}{3} + 3\frac{1}{2} + 11\frac{1}{6} = 4$$

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2;\ \sum x_i^2 f(x_i) = 4\frac{1}{3} + 9\frac{1}{2} + 121\frac{1}{6} = 26$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = 26 - 16 = 10,\ \sigma = \sqrt(10) = 3.2$$

b)

$$\mu = \sum x_i f(x_i) = -5\frac{1}{4} - 4\frac{1}{8} + 1\frac{1}{2} + 2\frac{1}{8} = -1$$

$$E(X^2) = \sum x_i^2 f(x_i) = 25\frac{1}{4} + 16\frac{1}{8} + 1\frac{1}{2} + 4\frac{1}{8} = 9.25$$

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 = 9.25 - 1 = 8.25,\ \sigma = 2.872$$

19. Lösung:

a)

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\},\ P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{6}$$

Es ist

$$\begin{aligned} X(1) &= 2,\ P(X=2) = \frac{1}{6} \\ X(2) &= 4,\ P(X=2) = \frac{1}{6} \\ X(3) &= 6, \cdots \\ X(4) &= 8, \cdots \\ X(5) &= 10, \cdots \\ X(6) &= 12, \cdots \end{aligned}$$

Damit kann man die Dichtefunktion tabellarisch aufstellen:

x_i	2	4	6	8	10	12
$f(x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Damit ist

$$\mu_x = E(X) = \sum x_i f(x_i) = 7,\ E(X^2) = \sum x_i^2 f(x_i) = \frac{364}{6} = 60.7$$

$$\sigma_x^2 = E(X^2) - \mu_x^2 = 11.7, \sigma_x = 3.4$$

b) Ω ist wie oben;

$$\begin{array}{ll} Y(1) = 1 & Y(2) = 3 \\ Y(3) = 1 & Y(4) = 3 \\ Y(5) = 1 & Y(6) = 3 \end{array}$$

und

$$P(Y=1) = P(\{1,3,5\}) = \frac{1}{2};\ P(Y=3) = P(\{2,4,6\}) = \frac{1}{2}$$

x_i	1	3
$f(x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Damit ist

$$\mu_y = E(Y) = 2,\ E(Y^2) = 5,\ \sigma = 1$$

c) Ω ist wie oben; Definitionsgemäß ist $(X+Y)(\omega) = X(\omega) + Y(\omega)$, daher

$$\begin{aligned}(X+Y)(1) &= 3\\ (X+Y)(2) &= 7\\ (X+Y)(3) &= 7\\ (X+Y)(4) &= 11\\ (X+Y)(5) &= 11\\ (X+Y)(6) &= 15\end{aligned}$$

$$P(X+Y=3) = \frac{1}{6} \qquad P(X+Y=7) = \frac{1}{3}$$
$$P(X+Y=15) = \frac{1}{6} \qquad P(X+Y=11) = \frac{1}{3}$$

x_i	3	7	11	15
$f(x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

$$\mu_{X+Y} = 9,\ E((X+Y)^2) = \frac{574}{6},\ \sigma_{X+Y} = 3.8$$

20. X=(Anzahl der Würfe), Z=(Zahl oben), W=(Wappen oben).

$$\Omega = \{Z, WZ, WWZ, WWWZ, WWWWZ, WWWWW\}$$

und

$$\begin{aligned}X(Z) = 1 \quad &, \quad P(X=1) = P(\{Z\}) = \frac{1}{2}\\ X(WZ) = 2 \quad &, \quad P(X=2) = P(\{WZ\}) = \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{4}\\ X(WWZ) = 3 \quad &, \quad P(X=3) = \frac{1}{8}\\ X(WWWWZ) = 4 \quad &, \quad P(X=4) = \frac{1}{16}\\ X(WWWWZ) = 5 \quad &,\\ X(WWWWW) = 5 \quad &, \quad P(X=5)\\ &\quad = P(\{WWWWZ\}) + P(\{WWWWW\})\\ &\quad = \frac{1}{32} + \frac{1}{32} = \frac{1}{16}\end{aligned}$$

Damit erhält man die Dichte von X:

x_i	1	2	3	4	5
$f(x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

und daher $E(X) = \frac{31}{16}$

21.

$$\Omega = \{ZW, WZ, WW, ZZ\}$$

$$\begin{aligned} X(ZW) = 1 \quad &, \\ X(WZ) = 1 \quad &, \quad P(X=1) = \frac{1}{2} \\ X(ZZ) = 2 \quad &, \quad P(X) = 2 = \frac{1}{4} \\ X(WW) = -5 \quad &, \quad P(X=-5) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

x_i	1	2	-5
$f(x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

und daher $E(X) = -\frac{1}{4}$, negativ, also ungünstig für den Spieler

22. a) X=(Gewinn)

$$\Omega = \{ZW, WZ, WW, ZZ\}$$

$$\begin{aligned} X(ZW) = 2 \quad &, \\ X(WZ) = 2 \quad &, \quad P(X=2) = \frac{1}{2} \\ X(ZZ) = 5 \quad &, \quad P(X=5) = \frac{1}{4} \\ X(WW) = 1 \quad &, \quad P(X=1) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

x_i	1	2	5
$f(x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

und daher $E(X) = 2.5$ Euro

b) Das Spiel ist fair, wenn $E(X)$=Einsatz, also Einsatz=2.5 Euro.

23. X=(Anzahl defekter Stücke in 3 Entnahmen); D_i=i-tes Stück defekt, G_i=i-tes Stück ganz;

$\Omega = \{G_1G_2G_3, G_1G_2D_3, G_1D_2D_3, D_1G_2D_3, D_1D_2G_3, D_1G_2G_3, G_1D_2G_3\}$

$$\begin{aligned}
f_X(0) = P(X=0) = P(G_1G_2G_3) &= P(G_1)P(G_2|G_1)P(G_3|G_1G_2) \\
&= \frac{6}{8}\frac{5}{7}\frac{4}{6} = \frac{20}{56} \\
f_X(1) = P(X=1) &= P(G_1G_2D_3) + P(G_1D_2G_3) + P(D_1G_2D_3) \\
&= \frac{6}{8}\frac{5}{7}\frac{2}{6} + \frac{6}{8}\frac{2}{7}\frac{5}{6} + \frac{2}{8}\frac{6}{7}\frac{5}{6} = \frac{30}{56} \\
f_X(2) = P(X=2) &= P(D_1D_2G_3) + P(D_1G_2D_3) + P(G_1D_2D_3) \\
&= 3\frac{2}{8}\frac{1}{7}\frac{6}{6} = \frac{6}{56}
\end{aligned}$$

x_i	0	1	2
$f(x_i)$	$\frac{20}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{6}{56}$

und$E(X) = \sum x_i f_X(x_i) = \frac{3}{4}$

24. X=(Anzahl der entnommenen Stücke), $\Omega = \{G_1, D_1G_2, D_1D_2H_3\}$

$$\begin{aligned}
f_X(1) &= P(X=1) = P(G_1) = \frac{8}{10} \\
f_X(2) &= P(X=2) = P(D_1G_2) = P(D_1)P(G_2|D_1) = \frac{2}{10}\frac{8}{9} \\
f_X(3) &= P(X=3) = P(D_1D_2H_3) = \frac{2}{10}\frac{1}{9}\frac{8}{8}
\end{aligned}$$

$$E(X) = 1\frac{8}{10} + 2\frac{2}{10}\frac{8}{9} + 3\frac{2}{10}\frac{1}{9}\frac{8}{8} = \frac{11}{9}$$

25. Hier bietet sich die Binomialverteilung an; Erfolg = Zahl liegt oben, $p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$ und $b(k, n, p) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$. Damit ist jeweils die gesuchte Wahrscheinlichkeit

    a) $P = b(3, 3, \frac{1}{2}) = \binom{3}{3}(\frac{1}{2})^3(\frac{1}{2})^0 = \frac{1}{8}$
    b) $P = b(2, 3, \frac{1}{2}) = \binom{3}{2}(\frac{1}{2})^2(\frac{1}{2})^1 = \frac{3}{8}$
    c) $P = b(1, 3, \frac{1}{2}) = \binom{3}{1}(\frac{1}{2})^1(\frac{1}{2})^2 = \frac{3}{8}$
    d) $P = b(0, 3, \frac{1}{2}) = \binom{3}{0}(\frac{1}{2})^0(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$

    wobei man sich daran erinnern muss, dass $\binom{n}{0} = 1$ ist.

26. a) $P = b(1, 4, \frac{2}{3}) = \binom{4}{1}(\frac{2}{3})^1(\frac{1}{3})^3 = \frac{8}{81}$

b) $P = 1 - b(0,4,\frac{2}{3}) = 1 - \binom{4}{0}(\frac{2}{3})^0(\frac{1}{3})^4 = 1 - \frac{1}{81} = \frac{80}{81}$

c) $P = b(3,4,\frac{2}{3}) + b(4,4,\frac{2}{3}) = \binom{4}{3}(\frac{2}{3})^3(\frac{1}{3})^1 + \binom{4}{4}(\frac{2}{3})^4(\frac{1}{3})^0 = \frac{48}{81}$

27. a) $P = b(3,6,\frac{1}{2} = \binom{6}{3}(\frac{1}{2})^3(\frac{1}{2})^3 = \frac{20}{64} = \frac{5}{16}$

b) $P = P((0Jungen)) + P((1Junge)) + P((2Jungen))$

$= (\frac{1}{2})^6 + \binom{6}{1}(\frac{1}{2})^1(\frac{1}{2})^5 + \binom{6}{2}(\frac{1}{2})^2(\frac{1}{2})^4 = \frac{11}{32}$

28. X Bernouilli-Verteilt mit $n = 8,\ p = \frac{1}{2}$. Es ist $E(x) = n \cdot p = 4$ und

$$P(X = 4) = b(4,8,\frac{1}{2} = \binom{8}{4}(\frac{1}{2})^4(\frac{1}{2})^4 = \frac{70}{256} = 0.27$$

29. Es ist

$$E(X) = np = 200, \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{10000(0.02)(1-0.02)} = 14$$

30. Das sind wichtige Rechenregeln, die oft gebraucht werden.

a)

$$Var(X) := E((X - E(X))^2) = E(X^2 - 2X \underbrace{E(X)}_{Konstante} + \underbrace{(E(X))^2}_{Konstante})$$

$$= E(X^2) - 2E(X)E(X) + (E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$

wobei die bekannten Rechenregeln für Erwartungswerte benutzt wurden.

b) Man hat $E(aX + b) = aE(X) + b$, und damit mit der Formel oben

$$Var(aX + b) = E((aX + b)^2) - (aE(X) + b)^2$$

$$= E(a^2X^2 + 2abE(X) + b^2) - (a^2E(X)^2 + 2abE(X) + b^2)$$

$$= a^2E(X^2) + 2abE(x) + b^2 - (a^2E(X)^2 + 2abE(X) + b^2)$$

$$= a^2(E(X^2) - (E(X))^2) = a^2Var(X)$$

c) i)

$$E(Z) = E(\frac{X - \mu}{\sigma}) = \frac{1}{\sigma}(E(X) - E(\mu)) = 0$$

ii)

$$E(Z^2) - \underbrace{(E(Z))^2}_{=0} = E(\frac{(X-\mu)^2}{\sigma^2}$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}E(X^2 - 2\mu X - \mu^2) = \frac{1}{\sigma^2}(E(X^2) - 2\mu\mu + \mu^2) = \frac{1}{\sigma^2}\underbrace{(E(X^2 - \mu^2)}_{=\sigma^2}$$

31. Nach den Definitionen von Erwartungswert und Varianz stetiger Verteilungen ist mittels partieller Integration

$$E(x) = \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x} dx = [x\lambda \frac{-1}{\lambda} e^{-\lambda x}]_0^\infty - \int_0^\infty x\lambda \frac{-1}{\lambda} e^{-\lambda x} dx$$
$$= 0 + \int_0^\infty e^{-\lambda x} dx = [\frac{-1}{\lambda} e^{-\lambda x}]_0^\infty = -\frac{-1}{\lambda} e^0 = \frac{1}{\lambda}$$
$$E(X^2) = \int_0^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = [x^2 \lambda \frac{-1}{\lambda} e^{-\lambda x}]_0^\infty - 2\int_0^\infty x \frac{-1}{\lambda} \lambda e^{-\lambda x} dx$$
$$= 0 + \frac{2}{\lambda} \underbrace{\int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x} dx}_{\frac{1}{\lambda}} = \frac{2}{\lambda^2}$$
$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

32. Mit dem üblichen Übergang zur Standardnormalverteilung ist

$$p = P(21 \le T \le 26) = P(\frac{21-20}{3} \le T^* \le \frac{26-20}{3}) = P(0.33 \le T^* \le 2)$$
$$= \Phi(2) - \Phi(0.33) = 0.9772 - 0.6293 = 0.3479$$

33. Wie immer Übergang zur Standardnormalverteilung:

a)

$$N = 800P(65 \le G \le 70) = 800P(\frac{65-66}{5} \le G^* \le \frac{70-66}{5})$$
$$= 800(\Phi(0.8) - \Phi(-0.2)) = 800(\Phi(0.8) - (1 - \Phi(0.2)))$$
$$= 800(0.7881 + 0.5793 - 1) = 800 \cdot 0.367 = 294$$

b)

$$P(G \ge 72) = P(1.2 \le G^* < \infty) = \Phi(\infty) - \Phi(1.2) = 1 - 0.8849 = 0.1151$$
$$N = 800 \cdot 0.1151 \approx 92$$

34. Gesucht ist

$$P(5.05 \le D) + P(D \le 4.95) = 1 - P(4.95 \le D \le 5.05)$$

Übergang zur Standardnormalverteilung:

$$P(4.95 \le D \le 5.05) = P(\frac{4.95-5}{0.04} \le D^* \le \frac{5.05-5}{0.04})$$
$$= \Phi(1.25) - \Phi(-1.25) = 2\Phi(1.25) - 1 = 0.788;\ 1 - 0.788 = 0.2112$$

Die Ausschusswahrscheinlichkeit ist 21.12%.

35. a) Mit Übergang zur Standardnormalverteilung ist

$$P(100 \leq IQ \leq 130) = P(0 \leq IQ^* \leq 2) = 0.972 - 0.5 = 0.4772$$

b)

$$P(130 < IQ) = P(2 < IQ^*) = 1 - 0.972 = 0.0228$$

36. Für die Poissonverteilung ist

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

a) $p = P(X = 0)+P(X = 1)+P(X = 2) = e^{-0.9}(1+\frac{0.9}{1}+\frac{0.9^2}{2!}) = 0.937$

b) Anahme: Poissonverteilung mit $\lambda = 2 \cdot 0.9 = 1.8$, $p = P(X = 0) = e^{-1.8} = 0.16$

c) Annahme: Poissonverteilung mit $\lambda = 3 \cdot 0.9 = 2.7$

$$p = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$$
$$= e^{-2.7}(1 + \frac{2.7}{1} + \frac{2.7^2}{2!} + \frac{2.7^3}{3!}) = 0.714$$