S. 52

V o r g e h e n s w e i s e:

1. Wahl einer statistischen Sicherheit P
2. Berechnen von Mittelwert und Standardabweichung
3. Ablesen (ggf. Interpolation) des zugehörigen Wertes für t in Abhängigkeit von P und n
4. Berechnen der Unsicherheit:

$$u_{\bar{x}} = t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = t(P,n) \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \tag{0.1}$$

5. Ergebnis:

$$\mu = \bar{x} \pm u_{\bar{x}} \tag{0.2}$$

Tab. 2.1: Student-Verteilung für zweiseitigen Vertrauensbereich (WaDi_Stud_Tab_03.m)

Anzahl der Einzelwerte	Werte t			
	Für $P = 68{,}3\%$	Für $P = 95{,}0\%$	Für $P = 99{,}0\%$	Für $P = 99{,}73\%$
4	1,142	2,776	4,606	6,619
5	1,111	2,571	4,032	5,507
6	1,091	2,447	3,707	4,904
7	1,077	2,364	3,499	4,530
8	1,067	2,306	3,355	4,276
9	1,059	2,262	3,250	4,094
10	1,053	2,228	3,169	3,957
11	1,048	2,201	3,106	3,850
12	1,044	2,179	3,054	3,764
13	1,041	2,160	3,012	3,694
14	1,038	2,148	2,977	3,636
15	1,035	2,131	2,947	3,586
16	1,033	2,120	2,921	3,544
18	1,029	2,101	2,878	3,422
20	1,026	2,086	2,845	3,40
22	1,023	2,074	2,819	3,379
24	1,022	2,064	2,797	3,344
26	1,020	2,056	2,779	3,316
28	1,018	2,048	2,763	3,291
30	1,018	2,042	2,750	3,270
35	1,015	2,030	2,724	3,229
40	1,013	2,021	2,704	3,199
50	1,011	2,009	2,678	3,157

60	1,009	2,000	2,660	3,129
80	1,007	1,990	2,639	3,096
100	1,005	1,984	2,626	3,077
120	1,005	1,980	2,617	3,064
150	1,004	1,976	2,609	3,051
180	1,003	1,973	2,603	3,042
200	1,003	1,972	2,601	3,038

Beispiel für das Berechnen von μ und u

Bei $n = 200$ Einzelmessungen x_i wurde berechnet:

$\overline{x} = 42,75$ Skt

$s = 3{,}5845$ Skt

Wird bei der Bestimmung des Vertrauensbereiches eine Aussagesicherheit von $P = 99,0\%$ verlangt, so ergibt sich aus der Tab. 2.1 der Wert $t \approx 2,601$, damit berechnet sich

$$\frac{t}{\sqrt{n}} = \frac{2,601}{\sqrt{200}} = 0{,}184$$

Die Messunsicherheit ist:

$$u_{\overline{x}_{P=99\%}} = s \cdot \frac{t}{\sqrt{n}} = 3{,}5845 \cdot 0{,}184 = 0{,}659 \text{ Skt}$$

Somit kann man mit 99 % Sicherheit damit rechnen, dass der Erwartungswert μ dieser Messreihe im „Vertrauensbereich“

$\overline{x} - u_{\overline{x}} \leq \mu \leq \overline{x} + u_{\overline{x}}$

liegt. Damit gilt für den Erwartungswert:

$\mu_{P=99\%} = \overline{x} \pm u_{\overline{x}} \equiv (42{,}75 \pm 0{,}659)\text{ Skt} = 42{,}75\text{ Skt} \pm 1{,}542\,\%$

S. 55

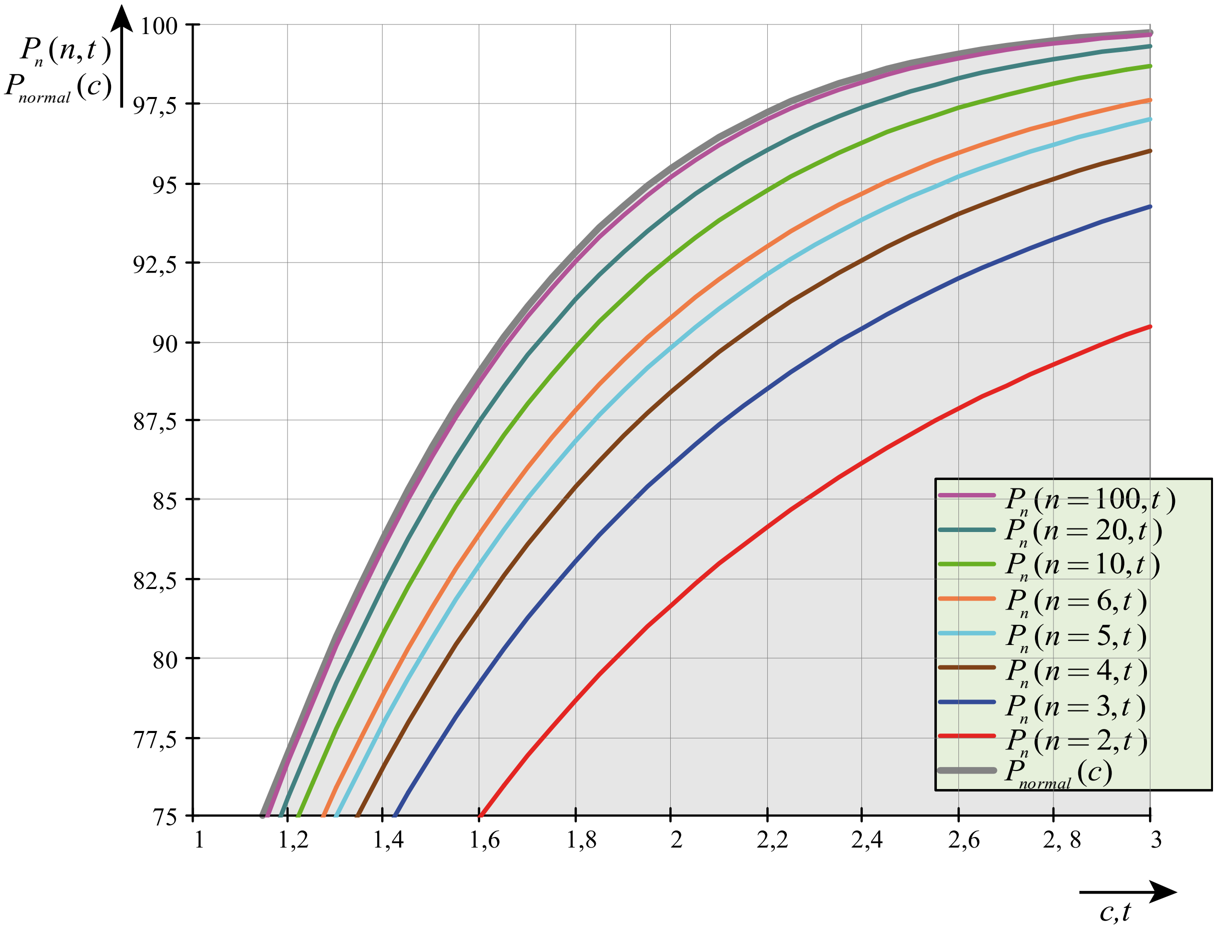

Abb. **Fehler! Kein Text mit angegebener Formatvorlage im Dokument.**.1: Statistische Sicherheit bei der Student-Verteilung (WaDi_Stud_02.m)

S. 59

Beispiel 1

Ein Werkstück habe das Sollmaß $\mu = 25\,\text{mm}$. Es wird eine Stichprobe von $n = 38$ Werkstücken vermessen. Der Stichprobenmittelwert wird als $\bar{x} = 25{,}32\,\text{mm}$, die Standardabweichung als $s = 0{,}846\,\text{mm}$ ermittelt. Die Standardabweichung des Stichprobenmittelwertes ist damit näherungsweise

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{0{,}846}{\sqrt{38}} = 0{,}1373$$

Unter der Voraussetzung, die Messwerte hätten eine Gauß´sche Normalverteilung, erhält man ein Signifikanzniveau von:

$$P(c) = P(|\bar{x} - \mu| \le c \cdot \sigma_{\bar{x}}) = P\left(\frac{|\bar{x} - \mu|}{\sigma_{\bar{x}}}\right) = 0{,}9803 < 0{,}9973$$

mit:

$$c = \frac{|\bar{x} - \mu|}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{25{,}32 - 25}{0{,}1373} = 2{,}33 < 3$$

Die Abweichung des Stichprobenmittelwertes $\bar{x}$ vom wahren Mittelwert μ (= Erwartungswert), bezogen auf die Standardabweichung, ist NICHT signifikant, d. h. ist sie OK.

S. 61

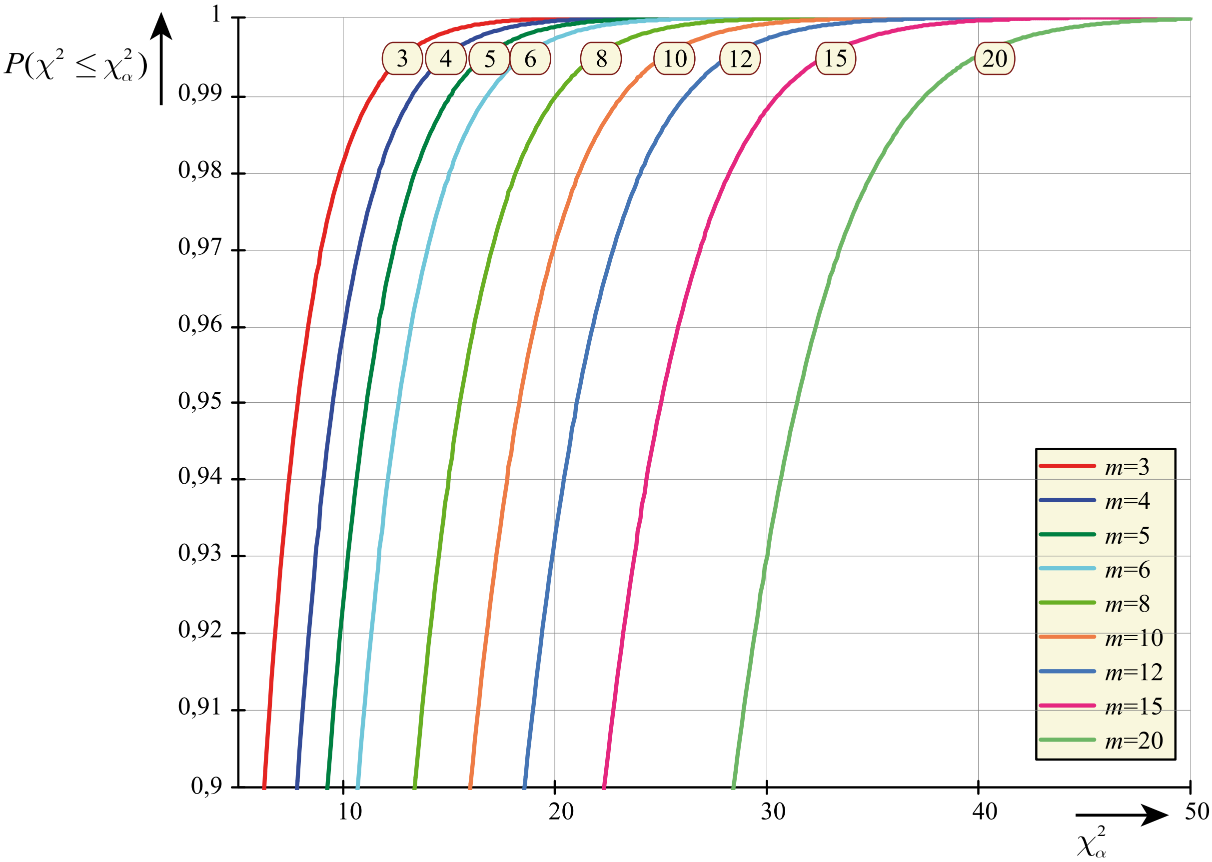

Abb. **Fehler! Kein Text mit angegebener Formatvorlage im Dokument.**.2: Signifikanzniveau von χ^2 bei $m = k - 1$ Freiheitsgraden (chi2V_01.m)

3 Verarbeiten von Messdaten

S. 82

Beispiel:

Gegeben sind die folgenden Stützstellen:

i	0	1	2	3	4
x_i	-1	-0,5	0	0,5	1
y_i	0.5	0,8	1	0,8	0,5

Mit $h_i = 0,5$

(1) $a_0 = 0,5$; $a_1 = 0,8$; $a_2 = 1,0$; $a_3 = 0,8$; $a_4 = 0,5$

(2) $c_0 = c_4 = 0$

(3) Die Koeffizienten $c_i, i = 1,2,3$ genügen dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} 2c_1 & + & 0,5c_2 & & & = & -0,6 \\ 0,5c_1 & + & 2c_2 & + & 0,5c_3 & = & -2,4 \\ & & 0,5c_2 & + & 2c_3 & = & -0,6 \end{array}$$

mit den Lösungen $c_1 = c_3 = 0,\ c_2 = -1,2$

(4) $b_0 = 0,6$; $b_1 = 0,6$; $b_2 = 0$; $b_3 = -0,6$

(5) $d_0 = 0,0$; $d_1 = -0,8$; $d_2 = 0,8$; $d_3 = 0,0$

Die einzelnen Interpolations-Polynome lauten:

$$\begin{array}{ll} P_0(x) = 0,5 + 0,3(x+1,0) & , \quad x \in [-1;\ 0,5] \\ P_1(x) = 0,8 + 0,4(x+0,5) - 0,8(x+0,5)^3 & , \quad x \in [-0,5;\ 0] \\ P_2(x) = 1,0 - 0,4x - 1,2x^2 + 0,8x^3 & , \quad x \in [0;\ 0,5] \\ P_3(x) = 0,8 - 0,3(x-0,5) & , \quad x \in [0,5;\ 1] \end{array}$$

Die Spline-Funktion soll an der Stelle $x_A = -0,2$ ausgewertet werden. Hierzu sind das Polynom $P_1(x_A)$ und seine Ableitungen auszuwerten. Die Ergebnisse sind in der Abb. 3.11 wiedergegeben.

S. 92

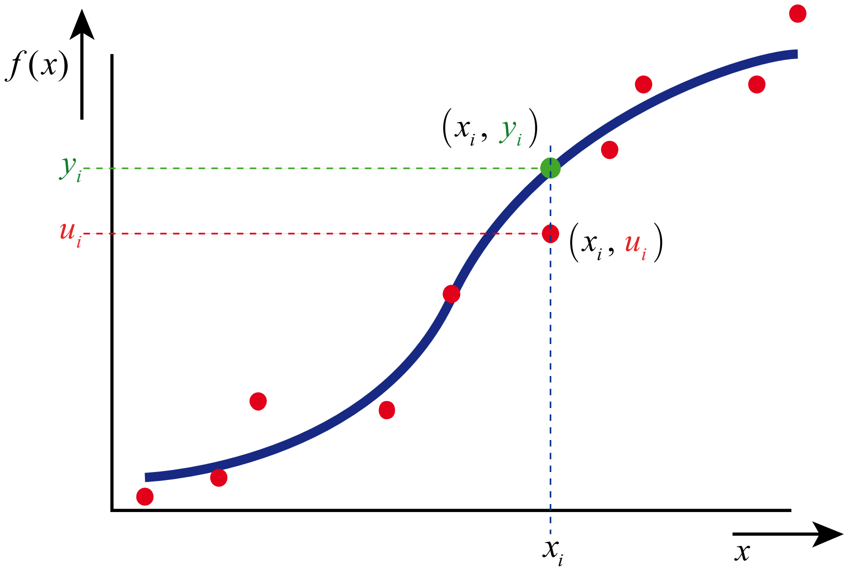

Abb. 3.1: Kubische Ausgleichsspline-Funktion

S. 93

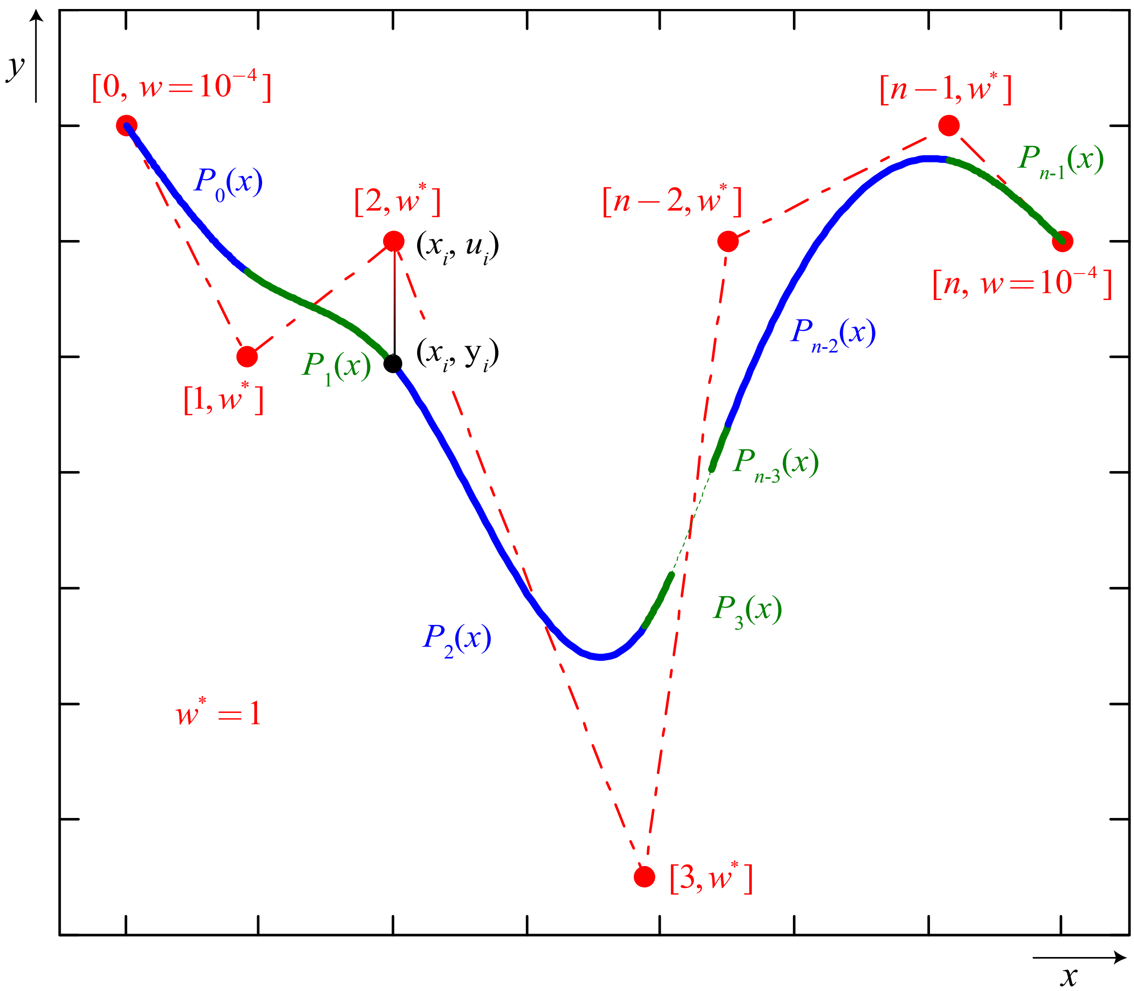

Abb. 3.2: Allgemeines Beispiel für einen kubischen Ausgleichsspline-Funktion