**9.1.1**

a) Allgemein gilt für die Eingangsimpedanz

$$\underline{Z}_E = R_1 + j\omega L + \frac{1}{1/R_2 + j\omega C}$$

b) Zur Bestimmung der Resonanzfrequenz $f_0$ wird $\underline{Z}_E$ nach Real- und Imaginärteil aufgelöst:

$$\underline{Z}_E = R_1 + j\omega L + \frac{1/R_2 - j\omega C}{1/R_2^2 + (\omega C)^2}$$

$$\underline{Z}_E = R_1 + \frac{1/R_2}{1/R_2^2 + (\omega C)^2} + j\left(\omega L - \frac{\omega C}{1/R_2^2 + (\omega C)^2}\right)$$

Bedingung für Resonanz

$$\mathrm{Im}\left\{\underline{Z}_E\right\} = 0$$

$$\rightarrow \omega_0 L = \frac{\omega_0 C}{1/R_2^2 + (\omega_0 C)^2} \quad / : \omega_0$$

$\omega_0 = 0$ 1. Lösung! $\underline{Z}_E(0) = R_1 + R_2$

2. Lösung

$$L = \frac{C}{1/R_2^2 + (\omega_0 C)^2}$$

$$C = \frac{L}{R_2^2} + (\omega_0 C)^2 L$$

$$C - \frac{L}{R_2^2} = (\omega_0 C)^2 L$$

$$\omega_0^2 = \frac{C - \frac{L}{R_2^2}}{C^2 L}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{C - \frac{L}{R_2^2}}{C^2 L}}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1\mu F - \frac{1\text{H}}{(1{,}155K\Omega)^2}}{(1\mu F)^2 \cdot 1\text{H}}}$$

$\omega_0 = 500 \cdot 1/\text{s}$

2 Lösungen:

$f_{01} = 0$ Hz (Gleichstrom)

$f_{02} = \dfrac{\omega_0}{2\pi}$ $\qquad$ $f_{02} = 79{,}64$ Hz

c)

$$\underline{Z}_E(\omega_0) = R_1 + \frac{1/R_2}{1/R_2^2 + (\omega_0 C)^2}$$

$$\underline{Z}_E(\omega_0) = 1K\Omega + \frac{1/1{,}155K\Omega}{1/(1{,}155K\Omega)^2 + (500\frac{1}{s} \cdot 1\mu F)^2}$$

$$\underline{Z}_E(\omega_0) = 1{,}87\ k\Omega$$

$$\underline{U}_q = 20\ V \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(\omega t) = 28{,}2\ V \cdot \cos(\omega t)$$

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_q}{\underline{Z}_E} = \frac{20V}{1{,}87K\Omega} = 10{,}72\ mA$$

$$\begin{aligned}
\underline{U}_1 &= \underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_1 = \underline{I}_1 \cdot (R_1 + j\omega_0 L) \\
&= 10{,}7mA \cdot (1K\Omega + j500\frac{1}{s} \cdot 1H) \\
&= 10{,}7mA \cdot (1K\Omega + j500\Omega) \\
&= 10{,}7V + j5{,}35V \\
&= 12\ V \cdot e^{j26{,}56°}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\underline{U}_2 &= \underline{U}_3 = \underline{U}_q - \underline{U}_1 \\
&= 20V - 10{,}7V - j5{,}35V \\
&= 9{,}3V - j5{,}35V\,\underline{I}_1 \\
&= 10{,}71\ V \cdot e^{-j30°}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\underline{I}_2 &= \frac{\underline{U}_2}{R_2} \\
&= \frac{10{,}71\ V \cdot e^{-j30°}}{1{,}153K\Omega} \\
&= 9{,}27\ \text{mA} \cdot e^{-j30°}
\end{aligned}$$

$$= 8,03mA - j4,64mA$$

$$\underline{I}_3 = \underline{U}_3 \cdot j\omega_0 C$$
$$= 10,71\ V \cdot e^{-j30°} \cdot j500\frac{1}{S} \cdot 1\mu F$$
$$= 5,35\ \text{mA} \cdot e^{j60°}$$
$$= 2.68mA + j4,64mA$$

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 10,7mA$$

d) $$P_E(\omega_{02}) = \underline{U}_q \cdot \underline{I}_q \cdot \cos(\varphi_u - \varphi_i)$$
$$= 20V \cdot 10,7mA$$
$$= 214,4\ mW$$

**9.2.1**

Die Berechnung der Gesamtimpedanz ist mit

$$\underline{Z}_{ges} = \left( \left( \frac{1}{\frac{1}{R} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L}} + R \right)^{-1} + \frac{1}{2R} \right)^{-1} + R$$

recht aufwändig.

Deshalb wird zur Vereinfachung untersucht, ob ein Resonanzfall vorliegt:

$$\underline{Y}_C = j\omega C = j \cdot 2000\ \frac{1}{s} \cdot 250\ \mu F = j\ 0,5\ S$$
$$\underline{Y}_L = \frac{1}{j\omega L} = \frac{-j}{2000\ 1/s \cdot 1\ mH} = -j\ 0,5\ S$$

**Da $\underline{Y}_C = -\underline{Y}_L$ liegt der Resonanzfall vor.**

Damit heben sich die Ströme $\underline{I}_5$ und $\underline{I}_6$ auf, so dass der Parallelschwingkreis, gebildet aus L und C, bei der Berechnung der Gesamtimpedanz durch einen Leerlauf ersetzt wird.

Damit wird

$$\underline{Z}_{ges} = R + 2R \,||\, 2R = 2R = 20\ \Omega$$

Aus $u_q(t) = 20V \cos(\omega t + 60°)$ folgt:

$$\underline{U}_q = \frac{20V}{\sqrt{2}} \cdot e^{j60°}$$

Somit berechnet sich der Strom $\underline{I}_1$ zu

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_q}{\underline{Z}_{ges}} = \frac{20\text{V} \cdot \text{e}^{j60°}}{\sqrt{2} \cdot 20\Omega} = \frac{1\text{A}}{\sqrt{2}} \cdot \text{e}^{j60°}$$

und daraus die zeitabhängige Darstellung

$$\text{i}_1(\text{t}) = 1\text{A} \cdot \cos(\omega\text{t} + 60°)\,.$$

Mit Hilfe der Stromteilerregel lässt sich daraus $\underline{I}_2$ berechnen:

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_1 \cdot \frac{R}{R + 2R} = \frac{1A \cdot e^{j60°}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{20\Omega}{20\Omega + 20\Omega} = \frac{0,5A}{\sqrt{2}} \cdot e^{j60°} \quad \rightarrow \quad i_2(t) = \frac{0,5A}{\sqrt{2}} \cdot \cos(\omega t + 60°)$$

Nach der Knotenregel folgt:

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_1 - \underline{I}_2 = \frac{0,5A}{\sqrt{2}} \cdot e^{j60°} \qquad \rightarrow \qquad i_3(t) = 0,5A \cdot \cos(\omega t + 60°)$$

Da im Resonanzfall die Parallelschaltung aus L und C durch einen Leerlauf ersetzt werden kann, fließt der Strom $i_3(t)$ auch als $i_4(t)$ durch den Parallelwiderstand R

$$i_4(t) = i_3(t) = 0,5A \cdot \cos(\omega t + 60°)$$

und erzeugt an ihm die Spannung

$$\underline{U}_4 = R \cdot \underline{I}_4 = \frac{0,5A}{\sqrt{2}} \cdot e^{j60°} \cdot 10\ \Omega = \frac{5V}{\sqrt{2}} \cdot e^{j60°}$$

Diese Spannung liegt auch an L und C

$$\underline{U}_5 = \underline{U}_6 = \underline{U}_4$$

und bewirkt in L den Strom

$$\underline{I}_5 = \underline{U}_5 \cdot \underline{Y}_L = \frac{5V}{\sqrt{2}} \cdot e^{j60°} \cdot \left(-j0,5S\right)$$

$$= \frac{2,5A}{\sqrt{2}} \cdot e^{-j30°} \qquad \rightarrow \qquad i_5(t) = 2,5A \cdot \cos(\omega t - 30°)$$

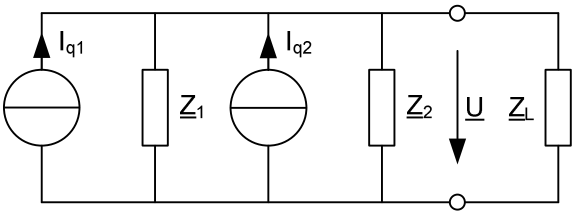
und in C den Strom

$$\underline{I}_6 = \underline{U}_6 \cdot \underline{Y}_L = \frac{5V}{\sqrt{2}} \cdot e^{j60°} \cdot j0,5S$$

$$\underline{I}_6 = \frac{2,5A}{\sqrt{2}} e^{j150°} \qquad \rightarrow \qquad i_6(t) = 2,5A \cdot \cos(\omega t + 150°)$$

**9.2.2**

a) Da die beiden Wechselspannungsquellen parallel geschaltet sind, ist es sinnvoll, die Spannungsquellen in Stromquellen umzuwandeln:




$$\underline{I}_{q1} = \frac{\underline{U}_{q1}}{\underline{Z}_1} = \frac{\frac{100V}{\sqrt{2}} e^{j45°}}{(8 + j6)\Omega} = 7{,}07\text{A } e^{j8,1°} = 7A + j1A$$

$$\underline{I}_{q_2} = \frac{\underline{U}_{q_2}}{\underline{Z}_2} = \frac{\frac{80V}{\sqrt{2}} e^{j30°}}{(4 + j3)\Omega} = 11,3Ae^{-j6,9°} = 11,23A - j1,353A$$

$$\underline{I}_q = \underline{I}_{q_1} + \underline{I}_{q_2} = 18,23A - j0,353A = 18,23Ae^{-j1,11°}$$

$$\underline{U} = \underline{I}_q \cdot \underline{Z}_{ges} = \underline{I}_q / \underline{Y}_{ges}$$

$$\underline{Z}_L = R_1 + \frac{1}{1/R_2 + j\omega C} = 5\Omega + \frac{1}{\frac{1}{4\Omega} + j2\pi 100\text{Hz} \cdot 0,35mF}$$

$$\underline{Z}_L = 5\Omega + \frac{1}{\left(0,25 + j0,333\right)S} = 6,72\Omega e^{-j16,6°}$$

$$\underline{Y}_L = 0,149Se^{j16,6°} = \left(0,143 + j0,0425\right)S$$

$$\underline{Y}_1 = 1/\underline{Z}_1 = 0,1Se^{-j36,9°} = \left(0,08 - j0,06\right)S$$

$$\underline{Y}_2 = 1/\underline{Z}_2 = 0,2Se^{-j36,9°} = \left(0,16 - j0,12\right)S$$

$$\underline{Y}_{ges} = \underline{Y}_L + \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 = \left(0,383 - j0,1375\right)S = 0,407Se^{-j19,75°}$$

$$\underline{U} = \frac{\underline{I}_q}{\underline{Y}_{ges}} = \frac{18,23Ae^{-j1,1°}}{0,407Se^{-j19,75°}} = 44,79\ V \cdot e^{j18,65°} = \left(42,43 + j14,32\right)V$$

b)

$$\underline{I} = \underline{U} \cdot \underline{Y}_L = 44,79Ve^{j18,65°} \cdot 0,149Se^{j16,6°} = 6,674Ae^{j35,25°} = \left(5,45 + j3,852\right)A$$

c)

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = 44,79Ve^{j18,65°} \cdot 6,674Ae^{-j35,25°} = 298,9VAe^{-j16,6°} = \left(286,5 - j85,4\right)VA$$

$\Rightarrow P = 286{,}4W$
$\Rightarrow Q = 85{,}4Var$ (kapazitiv)

d)

$P_{R1} = \left|\underline{I}\right|^2 \cdot R_1 = (6{,}674A)^2 \cdot 5\Omega = 222{,}7W$

$\underline{U}_{r2} = \underline{U} - \underline{U}_{r1}$

$\underline{U}_{r1} = \underline{I} \cdot R_1 = 6{,}674Ae^{j35{,}25°} \cdot 5\Omega = 33{,}37Ve^{j35{,}25°} = \left(27{,}25 + j19{,}26\right)V$

$\underline{U}_{r2} = 42{,}43V + j14{,}32V - 27{,}25V - j19{,}26V = 15{,}18V - j4{,}94V = 15{,}96Ve^{-j18{,}03°}$

$P_{R2} = \left|\underline{U}_{R2}\right|^2 / R_2 = \left(15{,}96V\right)^2 / 4\Omega = 63{,}68W$

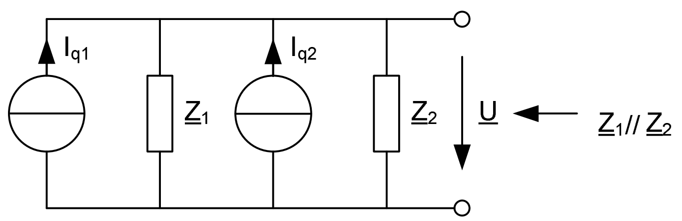
$\mathrm{Q_C} = \left|\underline{\mathrm{U}}_\mathrm{C}\right|^2 \omega\mathrm{C} = \left(15{,}88\mathrm{V}\right)^2 \cdot 0{,}333\mathrm{S} = 84{,}9\mathrm{Var}$ (kapazitiv) (die geringe Abweichung zu c) ist auf Rundungsfehler zurückzuführen)

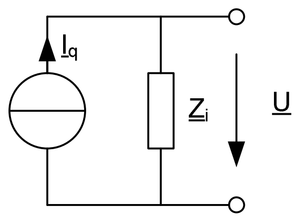
e) (hier wird die Leistungsabgabe der Quellen ohne die komplexen Innenwiderstände berechnet)

$\underline{\mathrm{S}}_1 = \underline{\mathrm{U}} \cdot \underline{\mathrm{I}}_{q1}^* = 44{,}79\mathrm{Ve}^{j18{,}65°} \cdot 7{,}07\mathrm{Ae}^{-j8{,}1°} = 316{,}7\mathrm{VAe}^{j10{,}55°} = 311{,}3\mathrm{W} + j58{,}0\mathrm{Var}$

$\underline{\mathrm{S}}_2 = \underline{\mathrm{U}} \cdot \underline{\mathrm{I}}_{q2}^* = 44{,}79\mathrm{Ve}^{j18{,}65°} \cdot 11{,}3\mathrm{Ae}^{j6{,}9°} = 506{,}1\mathrm{VAe}^{j25{,}5°} = 456{,}6\mathrm{W} + j218{,}3\mathrm{Var}$

f) Ersatzstromquelle:

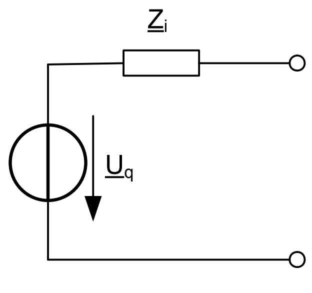



$\underline{I}_q = \underline{I}_{q_1} + \underline{I}_{q_2} = 7A + j1A + 11{,}23A - j1{,}353A = 18{,}23Ae^{-j1{,}1°}$

$$\underline{Z}_i = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = 3{,}33\Omega \cdot e^{j36{,}9°}$$

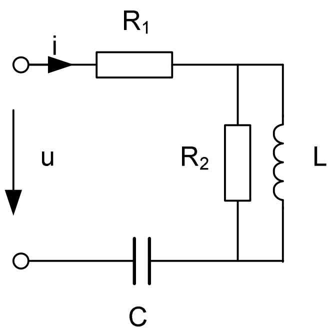
Ersatzspannungsquelle:




$\underline{U}_q = \underline{I}_q \cdot \underline{Z}_i = 60{,}8Ve^{j35{,}7°} \quad \underline{Z}_i = 3{,}33\Omega \cdot e^{j36{,}9°}$

g.) Anpassung: $\underline{Z}_\mathrm{L} = \underline{Z}_\mathrm{i}^*$ $\qquad P_{\max} = \dfrac{\left|\underline{U}_q\right|^2}{4\,\mathrm{Re}\left\{\underline{Z}_i\right\}} = \dfrac{\left(60{,}8V\right)^2}{4 \cdot 2{,}66\Omega} = 347W$

**9.2.3**




a) $u(t) = 100V\cos(\omega t - 30^\circ)$

Strom soll um 51° nacheilen $\Rightarrow$

$i(t) = \hat{i}\cos(\omega t - 81^\circ)$

$$\underline{I} = \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}}e^{-j81^\circ}$$

$$\underline{U} = \frac{100V}{\sqrt{2}}e^{-j30^\circ}$$

$$\frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{\frac{100V}{\sqrt{2}}}{\frac{\hat{i}}{\sqrt{2}}}e^{j51^\circ} = \underline{Z}_E = \frac{100V}{\hat{i}}e^{j51^\circ}$$

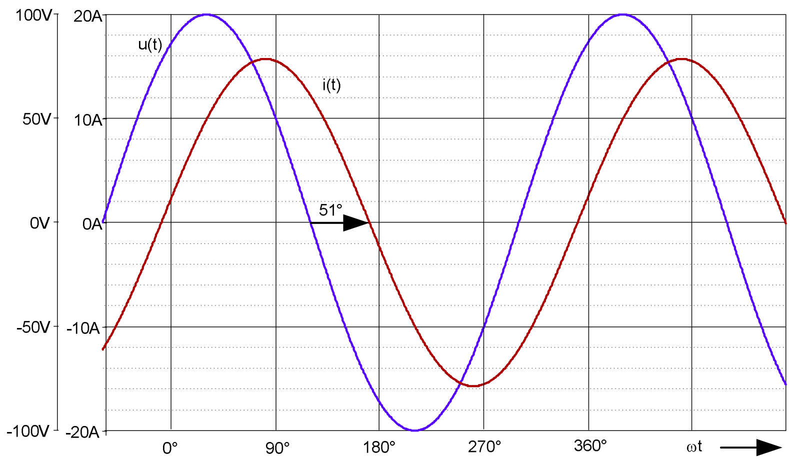
$$\underline{Z}_E = R_1 + \frac{1}{1/R_2 + 1/j\omega L} + \frac{1}{j\omega C}$$

$$\underline{Z}_E = 1{,}25\Omega + \frac{1}{1/20\Omega + 1/j8\Omega} + \frac{1}{j\omega C}$$

$$= 1{,}25\Omega + \frac{1}{0{,}05S - j0{,}125S} + \frac{1}{j\omega C}$$

$$= 4\Omega + j6{,}9\Omega - j\frac{1}{\omega C}$$

$$= \underbrace{4\Omega}_{\text{Re}} + j\underbrace{\left(6{,}9\Omega - \frac{1}{\omega C}\right)}_{\text{Im}}$$




$$\frac{\text{Im}}{\text{Re}} = \tan 51^\circ = 1{,}235$$

$$\frac{6{,}9\Omega - \frac{1}{\omega C}}{4\Omega} = 1{,}235$$

$$-\frac{1}{\omega C} = 1{,}235 \cdot 4\Omega - 6{,}9\Omega = -1{,}96\Omega$$

$$C = \frac{1}{\omega \cdot 1{,}96\Omega} = 255{,}1\mu F$$

b)

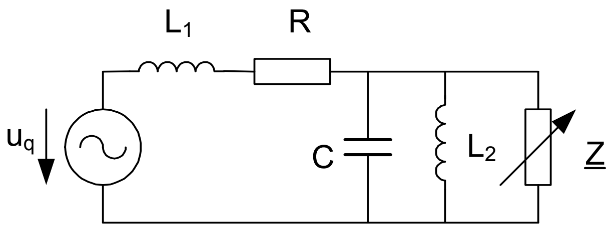
$$\underline{U} = \frac{100V}{\sqrt{2}}e^{-j30^\circ}$$

$$\underline{Z}_E = 4\Omega + j4{,}94\Omega$$

$$\underline{S} = \underline{U}\cdot\underline{I}^* = \underline{U}\cdot\left(\frac{\underline{U}}{\underline{Z}_E}\right)^* = |\underline{U}|^2\cdot\frac{1}{\underline{Z}_E^*} = \left(\frac{100V}{\sqrt{2}}\right)^2\frac{1}{4\Omega - j4{,}94\Omega} = 787{,}4VAe^{j51^\circ}$$

$\underline{S} = (495{,}5 + j611{,}9)VA \Rightarrow P = 495{,}5W \Rightarrow Q = 611{,}9Var$ (induktiv)

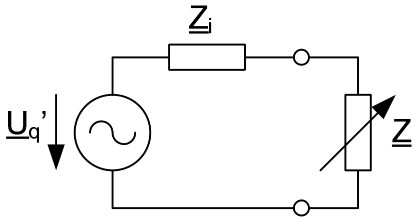
**9.2.4**




$u_q$ = 70,7 V cos ωt
f = 1,6 kHz
$L_1$ = 49,74 mH
$L_2$ = 99,5 mH
R = 500 Ω
C = 298,4 nF

a) Berechnen sie die Impedanz $\underline{Z}$ so, dass die Wirkleistung an $\underline{Z}$ maximal wird.

Zur Lösung wird an den Klemmen zu $\underline{Z}$ eine Ersatzspannungsquelle mit $u_q$' und $\underline{Z}_i$ berechnet:




Die Impedanz $\underline{Z}_i$ bestimmt man aus der Überlegung, dass beide Schaltungen sich an den Klemmen von $\underline{Z}$ gleich verhalten müssen; also sind auch die Impedanzen, die man an den Klemmen in die Schaltungen „sieht“ gleich groß.

$$\underline{Y}_i = \frac{1}{R + j\omega L_1} + j\omega C - \frac{j}{\omega L_2} = \frac{1}{500\Omega + j500\Omega} + j0{,}003S - j0{,}001S = 0{,}001S - j0{,}001 + j0{,}002S$$

$$\underline{Y}_i = 0{,}001S + j0{,}001S \Rightarrow \underline{Z}_i = 500\Omega - j500\Omega$$

Wirkleistung an $\underline{Z}$ wird maximal, wenn $\underline{Z} = \underline{Z}_i^*$ $\quad \Rightarrow \underline{Z} = 500\Omega + j500\Omega$

b) Wie groß ist dann die Scheinleistung $\underline{S}$ an $\underline{Z}$?

Dazu wird zunächst $u_q$' berechnet:

$$\underline{U}_q^{'} = \underline{U}_q \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}; \text{ mit } \underline{Z}_1 = R + j\omega L_1 = 500\Omega + j500\Omega \text{ und } \underline{Z}_2 = \frac{1}{j\omega C - \frac{j}{\omega L_2}} = -j500\Omega$$

$$\underline{U}_q^{'} = \frac{70{,}7V}{\sqrt{2}} \frac{-j500\Omega}{500\Omega} = -j50V$$

Der Strom durch $\underline{Z}$ berechnet sich nach dem Ersatzschaltbild zu:

$$\underline{I}_Z = \frac{\underline{U}_q^{'}}{\underline{Z}_i + \underline{Z}} = \frac{-j50V}{1000\Omega} = -j50mA$$

und die Spannung an $\underline{Z}$:

$$\underline{U}_Z = \underline{U}_q^{'} \frac{\underline{Z}}{\underline{Z}_i + \underline{Z}} = -j50V \frac{500\Omega + j500\Omega}{1000\Omega} = 25V - j25V = 35,35Ve^{-j45°}$$

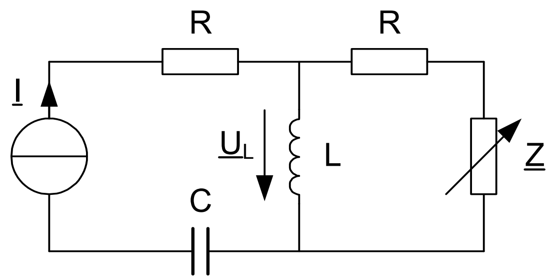
Damit wird die Scheinleistung an $\underline{Z}$ zu:

$$\underline{S}_Z = \underline{U}_Z \cdot \underline{I}_Z^{*} = (25V - j25V) \cdot j50mA = (1,25 + j \cdot 1,25)\,VA$$

c) Die Augenblickswerte von Spannung und Strom bestimmen sich dann zu:

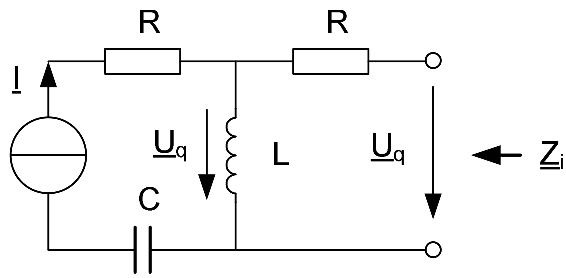
$$u_Z(t) = \sqrt{2} \cdot 35,35\ V \cdot \cos(\omega t - 45°) = 50V \cdot \cos(\omega t - 45°)$$
$$i_Z(t) = \sqrt{2} \cdot 50mA \cdot \cos(\omega t - 90°) = 70,71mA \cdot \cos(\omega t - 90°)$$

**9.2.5**




i(t) = 100 mA cos (ωt +45°)
R = 100 Ω
L = 3,98 mH
C = 1,59 µF
f = 2 kHz

a) Berechnen Sie die Impedanz $\underline{Z}$ so, dass die Wirkleistung an $\underline{Z}$ maximal wird.
Bei dieser Schaltung muss man beachten, dass die ideale Stromquelle impedanzmäßig einen Leerlauf darstellt.



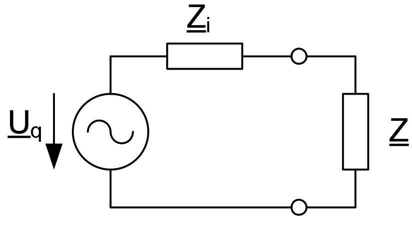

Damit berechnet sich $\underline{Z}_i$ zu :

$$\underline{Z}_i = R + j\omega L = 100\Omega + j50\Omega$$

Für maximale Leistung an $\underline{Z}$ muss dann gelten : $\underline{Z} = \underline{Z}_i^{*}$

$$\underline{Z} = 100\Omega - j50\Omega$$

b) Zur Bestimmung der Scheinleistung $\underline{S}$ entwickelt man eine Ersatzspannungsquelle:




Die Leerlaufspannung $\underline{U}_q$' bestimmt man über die leer laufende Schaltung. Dann fließt $\underline{I}$ über L und erzeugt oder die Leerlaufspannung $\underline{U}_q$'.

$$\underline{U}_q = \underline{I} \cdot j\omega L = \frac{100mAe^{j45°}}{\sqrt{2}} j50\Omega = 3,536Ve^{j135°}$$

$$\underline{I}_Z = \frac{\underline{U}_q}{\underline{Z} + \underline{Z}_i} = \frac{3,536Ve^{j135°}}{200\Omega} = 17,68mAe^{j135°}$$

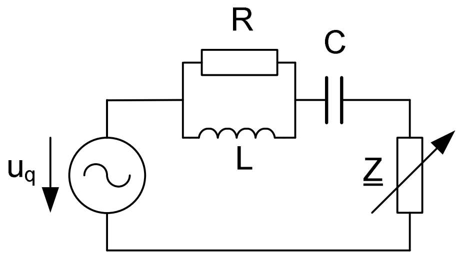
$$\underline{S}_Z = |\underline{I}|^2 \cdot \underline{Z} = (17{,}68\text{mA})^2 \cdot (100\Omega - j50\Omega) = (31{,}26 - j15{,}5)\,\text{mVA}$$

c) Die Spannung über der Induktivität L erhält man auch als Summe der Spannungen

$$\underline{U}_L = \underline{I}_Z \cdot \underline{Z} + \underline{I}_Z \cdot R = \underline{I}_Z(\underline{Z} + R) = 17{,}68\text{mA}e^{j135°}(200\Omega - j50\Omega) = 3{,}64\text{V}e^{j121°}$$

$$u_L(t) = 5{,}15\text{V}\cos(\omega t + 121°)$$

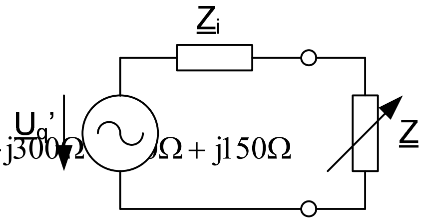
**9.2.6**




$u_q = 141{,}4\text{V}\cos(\omega t + 45°)$
$f = 2\text{kHz}$
$L = 23{,}87\text{mH}$
$R = 300\Omega$
$C = 265{,}3\text{nF}$

a) Berechnen Sie die Impedanz $\underline{Z}$ so, dass die Wirkleistung an $\underline{Z}$ maximal wird.

Wirkleistung in $\underline{Z}$ wird maximal, wenn gilt : $\underline{Z} = \underline{Z}_i^*$




Berechnung von $\underline{Z}_i$:

$$\underline{Z}_i = \frac{1}{j\omega C} + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L}} = -j300\Omega + \frac{1}{3{,}33\text{mS} - j3{,}33\text{mS}} = -j300\Omega + 150\Omega + j150\Omega$$

$$\underline{Z}_i = 150\Omega - j150\Omega$$

$$\underline{Z} = \underline{Z}_i^* = 150\Omega + j150\Omega$$

b) Die Quellspannung der Ersatzquelle stimmt der ursprünglichen Schaltung überein:

$$\underline{U}_q' = \underline{U}_q = \sqrt{2} \cdot 141{,}4\text{V}e^{j45°} = 200\text{V}e^{j45°}$$

Damit wird $\underline{I} = \dfrac{\underline{U}_q}{\underline{Z}_i + \underline{Z}} = \dfrac{200\text{V}e^{j45°}}{300\Omega} = 0{,}667\text{A}e^{j45°}$

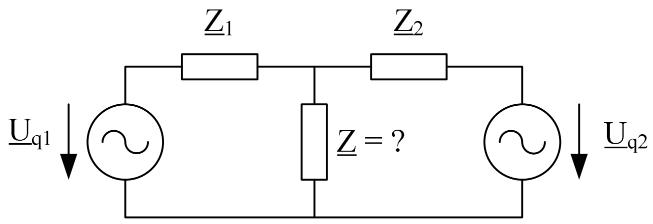
und die Scheinleistung in $\underline{Z}$: $\underline{S} = |\underline{I}|^2 \cdot \underline{Z} = (0{,}667\text{A})^2(150\Omega + j150\Omega) = (100 + j100)\,\text{VA}$

c) Die Spannung an $\underline{Z}$ berechnet sich zu:

$$\underline{U} = \underline{I} \cdot \underline{Z} = 0{,}667\text{A} \cdot e^{j45°} \cdot 212e^{j45°} = 141{,}4\text{V}e^{j90°} \Rightarrow u(t) = 200\text{V}\cos(\omega t + 90°)$$

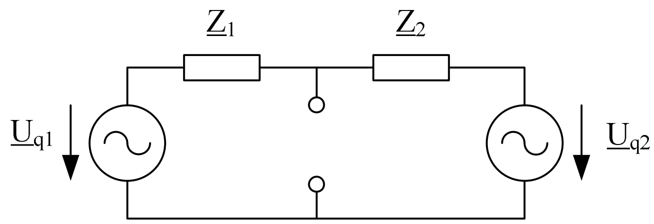
$$\underline{I} = 0{,}667\text{A}e^{j45°} \Rightarrow i(t) = 0{,}943\text{A}\cos(\omega t + 45°)$$

**9.2.7**




$\underline{U}_{q1} = 10\ \text{V}$
$\underline{Z}_1 = 10\ \Omega + \text{j}\ 20\ \Omega$
$\underline{U}_{q1} = 10\ \text{V} \cdot \text{e}^{\text{j}45°}$
$\underline{Z}_1 = 5\ \Omega - \text{j}\ 20\ \Omega$

a) Bestimmung der Impedanz $\underline{Z}$ für maximale Wirkleistung in $\underline{Z}$:
Dazu wird die Schaltung an den Anschlussklemmen von $\underline{Z}$ analysiert und ein Ersatzschaltbild entwickelt.
An den Klemmen wird eine Impedanz von $\underline{Z}_i = \underline{Z}_1 \| \underline{Z}_2$ ermittelt:




$$\underline{Z}_i = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = 30{,}73\Omega \text{e}^{-\text{j}12{,}5°}$$
$$= (30 - \text{j}6{,}67)\Omega$$

Damit muss bei maximaler Wirkleistung in $\underline{Z}$ gelten:

$$\underline{Z} = \underline{Z}_i^* = (30 + \text{j}6{,}67)\Omega$$

b) Zur Berechnung von Wirk- und Blindleistung an $\underline{Z}$ wird die Leerlaufspannung der Ersatzschaltung benötigt:

$$\underline{U}_q = \underline{U}_{q1} + \underline{I} \cdot \underline{Z}_1 = \underline{U}_{q1} - \frac{\underline{U}_{q1} - \underline{U}_{q2}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{Z}_1 = 10\text{V} - \frac{10\text{V} - 7{,}07\text{V} - \text{j}7{,}07\text{V}}{15\Omega}(10\Omega + \text{j}20\Omega)$$
$$= \left(-1{,}38 + \text{j}0{,}807\right)\text{V} = 1{,}6\text{Ve}^{\text{j}150°}$$

Damit berechnet sich der Laststrom zu:

$$\underline{I}_L = \frac{\underline{U}_q}{\underline{Z}_i + \underline{Z}_L} = \frac{1{,}6\text{Ve}^{\text{j}150°}}{60\Omega} = 26{,}7\text{mAe}^{\text{j}150°}$$

Daraus berechnet sich die Scheinleistung zu:

$$\underline{S} = \left|\underline{I}\right|^2 \underline{Z}_L = \left(26{,}7\text{mA}\right)^2 \cdot \left(30 + \text{j}6{,}67\right)\Omega = 21{,}4\text{mW} + \text{j}4{,}75\text{mVAr}$$
$$\Rightarrow P = 21{,}4\text{mW}$$
$$\Rightarrow Q = 4{,}75\text{mVar} \quad \text{(induktiv)}$$

**9.2.8**

$$u(t)=\begin{cases}\frac{2V}{1ms}t & \text{für}\quad 0\le t\le 1ms\\ 4V-\frac{2V}{1ms}t & \text{für}\quad 1ms\le t\le 2ms\\ 3V & \text{für}\quad 2ms\le t\le 5ms\end{cases}$$

Periodendauer: T = 5 ms

Mittelwert: $\overline{U}=\frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt=\frac{1}{5ms}\left(\int_0^{1ms}\frac{2V}{1ms}tdt+\int_{1ms}^{2ms}4V-\frac{2V}{1ms}tdt+\int_{2ms}^{5ms}3Vdt\right)$

$$\overline{U}=\frac{1}{5ms}\left(\frac{1V}{1ms}t^2\Big|_0^{1ms}+4V\,t\Big|_{1ms}^{2ms}-\frac{1V}{1ms}t^2\Big|_{1ms}^{2ms}+3V\cdot t\Big|_{2ms}^{5ms}\right)$$

$$=\frac{1}{5ms}\left(1Vms+4Vms-3Vms+9Vms\right)=2,2V$$

Effektivwert :

$$U_{eff}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)dt}=\sqrt{\frac{1}{5ms}\left[\int_0^{1ms}\frac{4V^2}{(1ms)^2}t^2dt+\int_{1ms}^{2ms}\left(4V-\frac{2V}{1ms}t\right)^2dt+\int_{2ms}^{5ms}9V^2dt\right]}$$

$$U_{eff}=\sqrt{\frac{1}{5ms}\left[\int_0^{1ms}\frac{4V^2}{(1ms)^2}t^2dt+\int_{1ms}^{2ms}\left(16V^2-\frac{16V^2}{1ms}t+\frac{4V^2}{(1ms)^2}t^2\right)dt+\int_{2ms}^{5ms}9V^2dt\right]}$$

$$U_{eff}=\sqrt{\frac{1}{5ms}\left[\frac{4V^2}{3(1ms)^2}t^3\Big|_{0ms}^{1ms}+\left(16V^2t-\frac{8V^2}{1ms}t^2+\frac{4V^2}{3(1ms)^2}t^3\right)\Big|_{1ms}^{2ms}+9V^2t\Big|_{2ms}^{5ms}\right]}$$

$$U_{eff}=\sqrt{\frac{1}{5ms}\left(\frac{4}{3}V^2ms+16V^2ms-24V^2ms+\frac{28}{3}V^2ms+27V^2ms\right)}$$

$$U_{eff}=2,44V$$

**9.2.9**

a)

$$\underline{Z}_i=R_1+\frac{1}{j\omega C}+\frac{1}{\frac{1}{R_2}+\frac{1}{j\omega L}}=100\Omega-j100\Omega+\frac{1}{5mS-j5mS}$$

$$=100\Omega-j100\Omega+100\Omega+j100\Omega=200\Omega$$

$$\underline{U}_q^{'}=\underline{U}_q=\frac{100V}{\sqrt{2}}=70{,}7V$$

Maximale Wirkleistung $\Rightarrow \underline{Z}=\underline{Z}_i^*=200\Omega$

b) $\underline{I}_Z = \dfrac{\underline{U}_q}{\underline{Z}_i + \underline{Z}} = \dfrac{70,7\text{V}}{400\Omega} = 176,8\text{mA}$

$\underline{S} = |\underline{I}|^2\,\underline{Z} = (176,8\text{mA})^2 \cdot 200\Omega = 6,25\text{W}$

$\Rightarrow \text{P} = 6,25\text{W}$

c) $\underline{U}_L = \underline{I}_Z \cdot \underline{Z}_2 = 176,8\text{mA} \cdot (100 + \text{j}100)\Omega = 17,68\text{V} + \text{j}17,68\text{V} = 25\text{Ve}^{\text{j}45°}$

$u(t) = \sqrt{2} \cdot 25V \cos(\omega t + 45°) = 35,35V \cos(\omega t + 45°)$

**9.2.10**

a) Die ideale Stromquelle stellt impedanzmäßig einen Leerlauf dar:

$\underline{Z}_i = R + \dfrac{1}{j\omega C} = 250\Omega - j250\Omega$

Maximale Wirkleistung: $\Rightarrow \underline{Z} = \underline{Z}_i^* = 250\Omega + j250\Omega$

b) $\underline{U}_q = \underline{I}\left(R + \dfrac{1}{j\omega C}\right) = 1Ae^{-j90°} \cdot (250\Omega - j250\Omega) = (-250V - j250V) = 353,6Ve^{-j135°}$

$\underline{I}_Z = \dfrac{\underline{U}_q}{\underline{Z}_i + \underline{Z}} = \dfrac{353,6\text{Ve}^{\text{j}135°}}{500\Omega} = 0,707\text{Ae}^{\text{j}135°}$

$\underline{S} = |\underline{I}|^2\,\underline{Z} = (0,707\text{A})^2 \cdot (250 + \text{j}250)\Omega = (125 + \text{j}125)\,\text{VA}$

$\Rightarrow \text{P} = 125\text{W}$

$\Rightarrow \text{Q} = 125\text{Var}$ (induktiv)

c) $i_Z(t) = \sqrt{2} \cdot 0,707A\cos(\omega t - 135°) = 1A \cdot \cos(\omega t - 135°)$

$\underline{U}_Z = \underline{I}_Z \cdot \underline{Z} = 0,707Ae^{-j135°}(250 + j250)\Omega = 272Ve^{-90°}$

$u_Z(t) = \sqrt{2} \cdot 272V \cos(\omega t - 90°) = 385V \cdot \cos(\omega t - 90°)$

**9.2.11**

a) Die ideale Stromquelle stellt impedanzmäßig einen Leerlauf dar:

$\underline{Z}_i = \text{R} + \text{j}\omega\text{L} = 100\Omega + \text{j}50\Omega$

Maximale Wirkleistung in $\underline{Z} \Rightarrow \underline{Z} = \underline{Z}_i^* = 100\Omega - \text{j}50\Omega$

b) Die Leerlaufspannung der Ersatzquelle beträgt

$\underline{U}_q = \underline{I} \cdot \text{j}\omega\text{L} = \dfrac{100\text{mAe}^{\text{j}45°}}{\sqrt{2}}\,\text{j}50\Omega = 3,54\text{Ve}^{\text{j}135°}$

Der Strom durch $\underline{Z}$ wird dann:

$$\underline{I}_Z = \frac{\underline{U}_q}{\underline{Z}_i + \underline{Z}} = \frac{3,54\text{V}e^{j135°}}{200\Omega} = 17,7\text{mA}e^{j135°}$$

Damit berechnet sich die komplexe Leistung in $\underline{Z}$ zu:

$$\underline{S} = |\underline{I}|^2 \underline{Z} = (17,7\text{mA})^2 \cdot (100 - j50)\Omega = (31,3 - j15,7)\text{mVAr}$$
$$\Rightarrow P = 31,3\text{mW}$$
$$\Rightarrow Q = 15,7\text{mVar} \quad \text{(kapazitiv)}$$

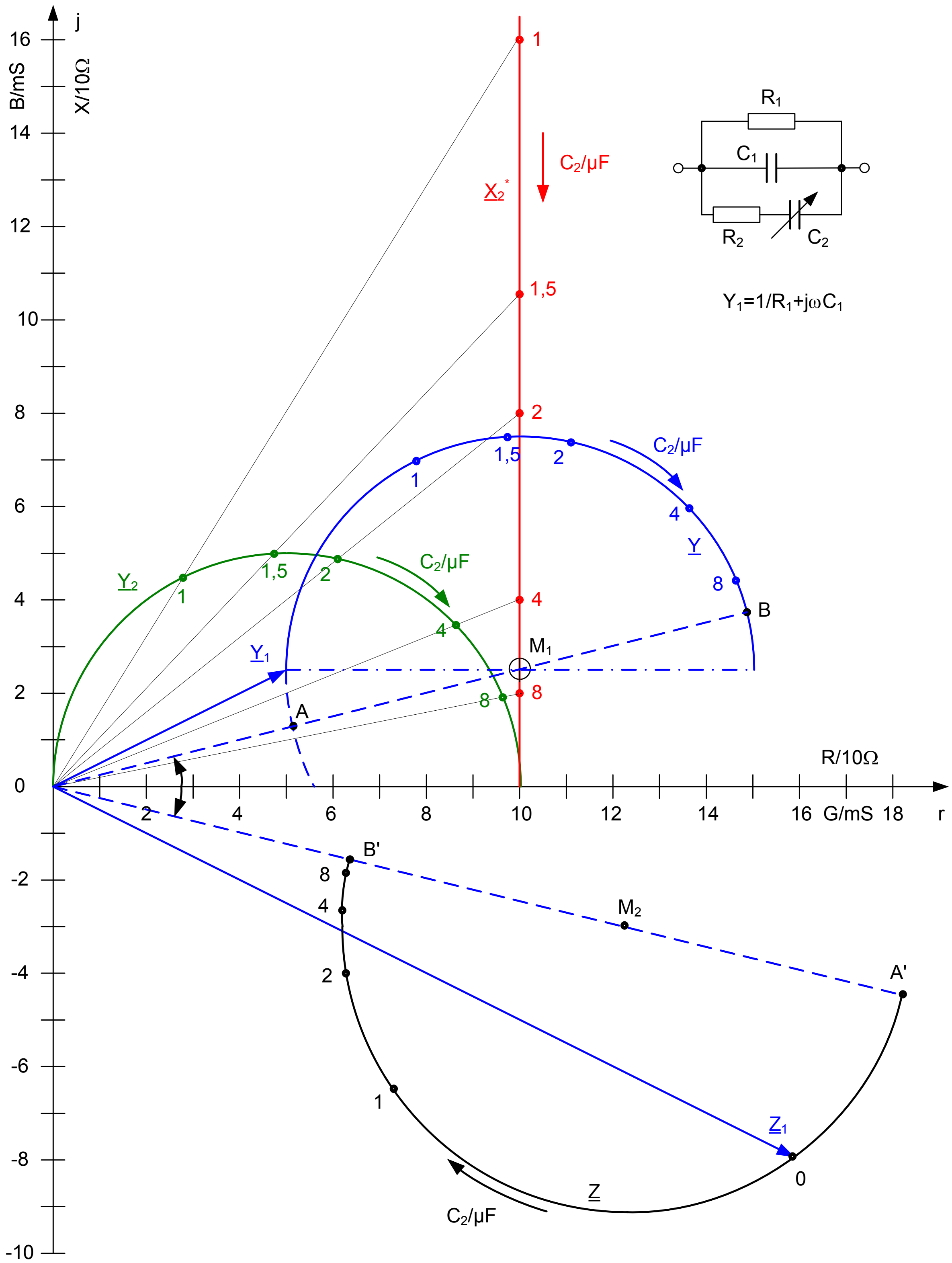
c) $$\underline{U}_L = \underline{I}_Z \cdot (\underline{Z} + R) = 17,7\text{mA}e^{j135°}(200 - j50)\Omega = 3,65\text{V}e^{j121°}$$
$$u_L(t) = \sqrt{2} \cdot 3,65\text{V} \cdot \cos(\omega t + 121°) = 5,16\text{V} \cdot \cos(\omega t + 121°)$$

**9.3.1** 1. Ortskurve von $\underline{Z}_2 = R_2 - \frac{j}{\omega C_2}$ zeichnen (rot).

2. Leitwert $\underline{Y}_2 = 1/\underline{Z}_2$ konstruieren. (Invertierung → grün).

3. Leitwert $\underline{Y} = \underline{Y}_2 + \underline{Y}_1$ mit $\underline{Y}_1 = 1/R_1 + j\omega C_1$ konstruieren (Verschiebung → blau).

4. Impedanz $\underline{X} = 1/\underline{Y}$ konstruieren (Invertierung → schwarz).



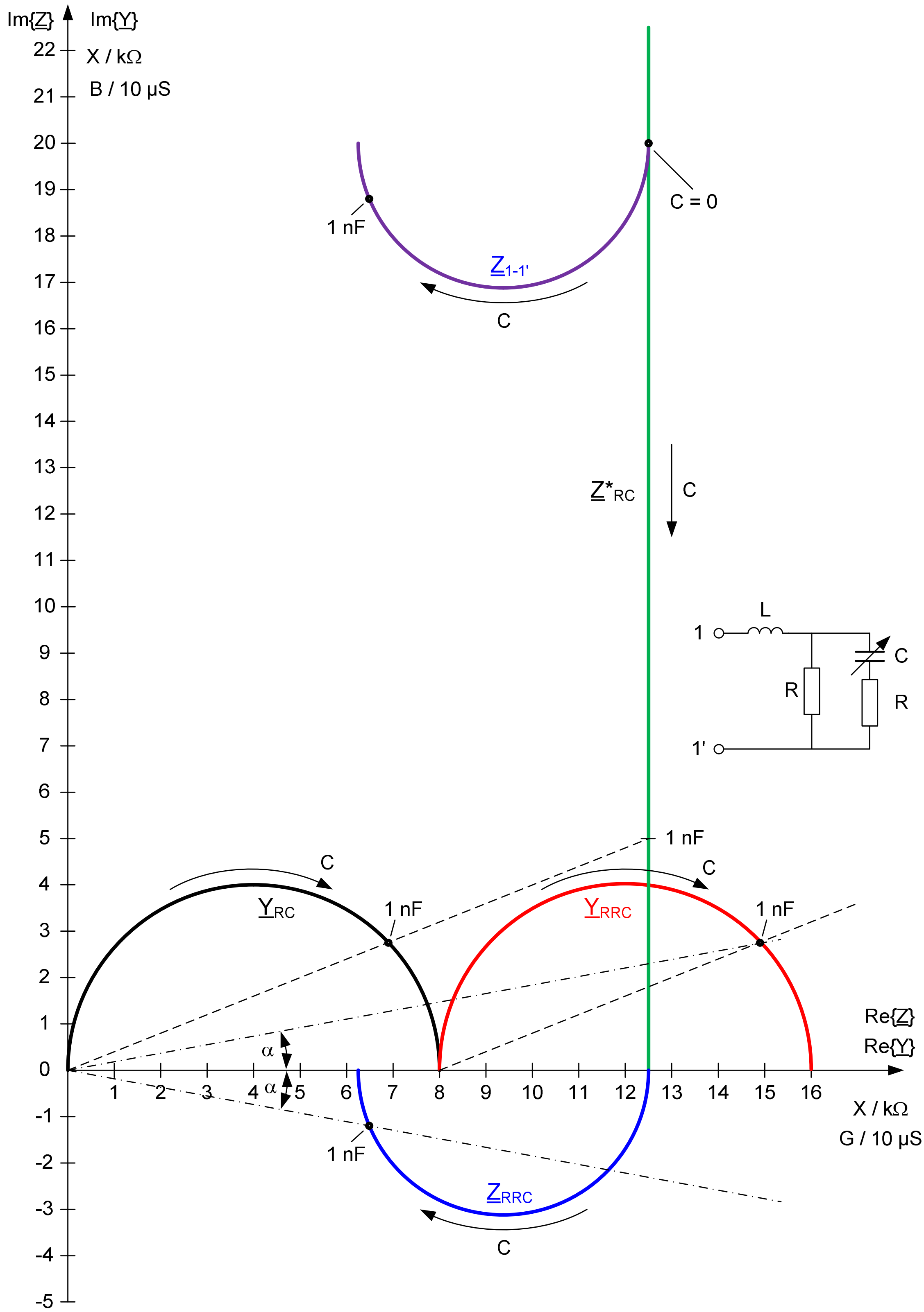
**9.3.2** 1. Impedanz $\underline{Z}_{RC}^{*} = R + j/\omega C$ zeichnen (grün).

2. Admittanz $\underline{Y}_{RC} = 1/\underline{Z}_{RC}$ konstruieren (Invertierung → schwarz).

3. Admittanz $\underline{Y}_{RRC} = \underline{Y}_{RC} + 1/R$ konstruieren (Verschiebung → rot).

4. Impedanz $\underline{Z}_{RRC} = 1/\underline{Y}_{RRC}$ konstruieren (Invertierung → blau).

5. Impedanz $\underline{Z}_{1-1'} = \underline{Z}_{RRC} + j\omega L$ konstruieren (Verschiebung → lila).



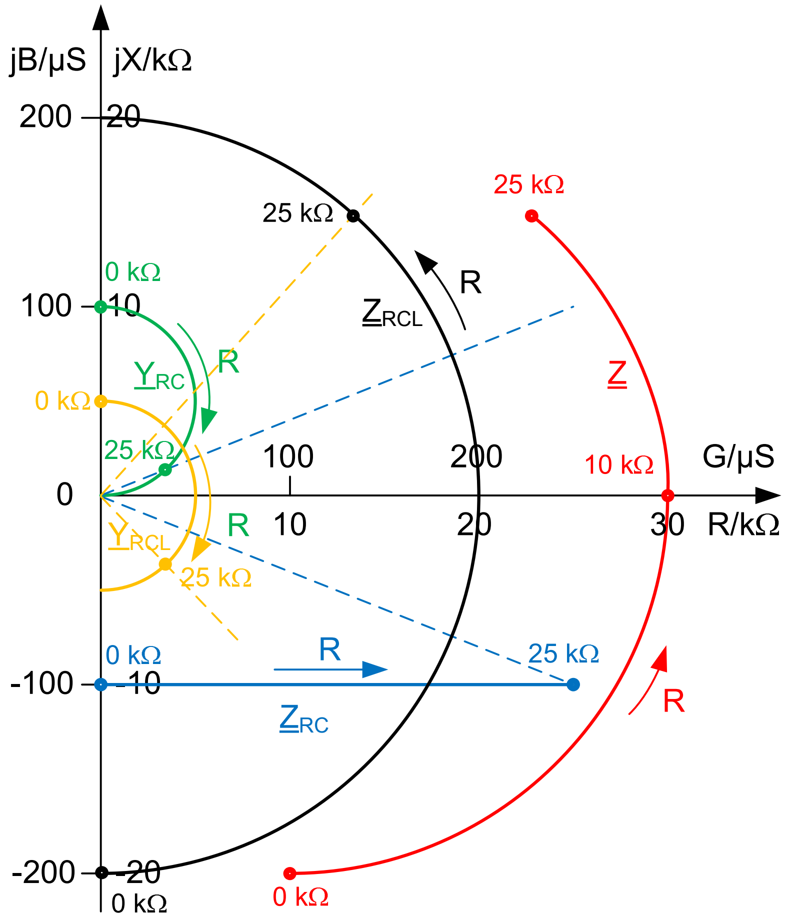
**9.3.3** 1. Impedanz $\underline{Z}_{RC} = R - j/\omega C$ zeichnen (blau).

2. Admittanz $\underline{Y}_{RC} = 1/\underline{Z}_{RC}$ konstruieren (Invertierung → grün).

3. Admittanz $\underline{Y}_{RCL} = \underline{Y}_{RC} - j/\omega L$ konstruieren (Verschiebung → orange).

4. Impedanz $\underline{Z}_{RCL} = 1/\underline{Y}_{RCL}$ konstruieren (Invertierung → schwarz).

5. Impedanz $\underline{Z} = \underline{Z}_{RCL} + R$ konstruieren (Verschiebung → rot).

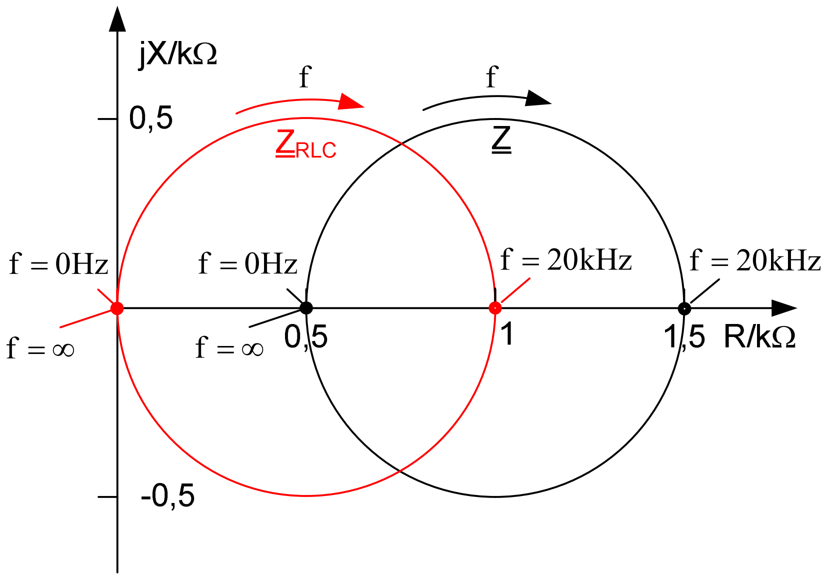


**9.3.4** 1. $\underline{Z} = R_1 + \dfrac{1}{\dfrac{1}{R} + j\omega C - j/\omega L}$ wird reell für

$$\omega C = \frac{1}{\omega L} \Rightarrow C = \frac{1}{\omega^2 L} = \frac{1}{(2\pi \cdot 20\mathrm{kHz})^2\, 100\mathrm{mH}} = 633\mathrm{pF}$$

2. Impedanz $\underline{Z}_{RLC} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{R} + j\omega C - j/\omega L}$ zeichnen (Kreis durch Ursprung und R = 1kΩ, rot).

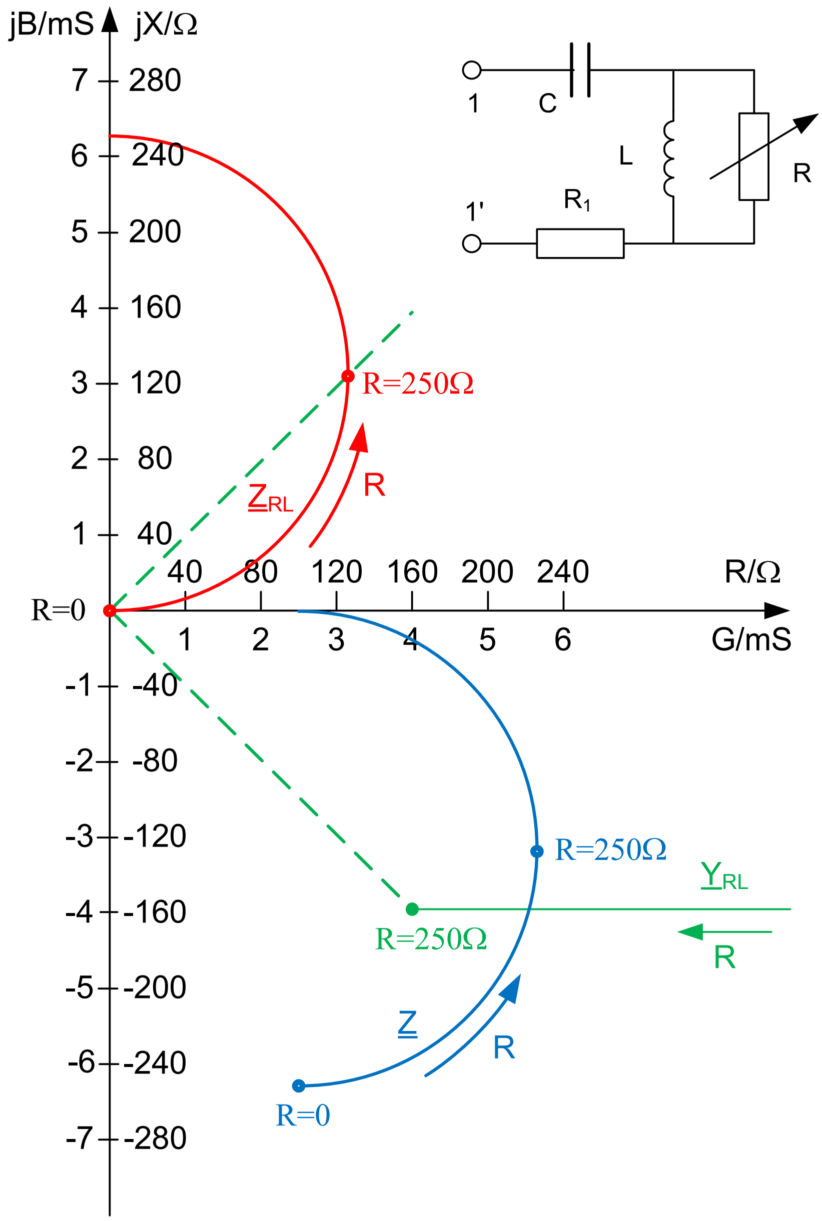
3. Verschiebung des Kreises um $R_1$ = 500Ω nach rechts (schwarz).



**9.3.5** 1. Admittanz $\underline{Y}_{RL} = \frac{1}{R} - \frac{j}{\omega L}$ zeichnen (grün).

2. Impedanz $\underline{Z}_{RL} = 1/\underline{Y}_{RL}$ konstruieren (Invertierung → rot).

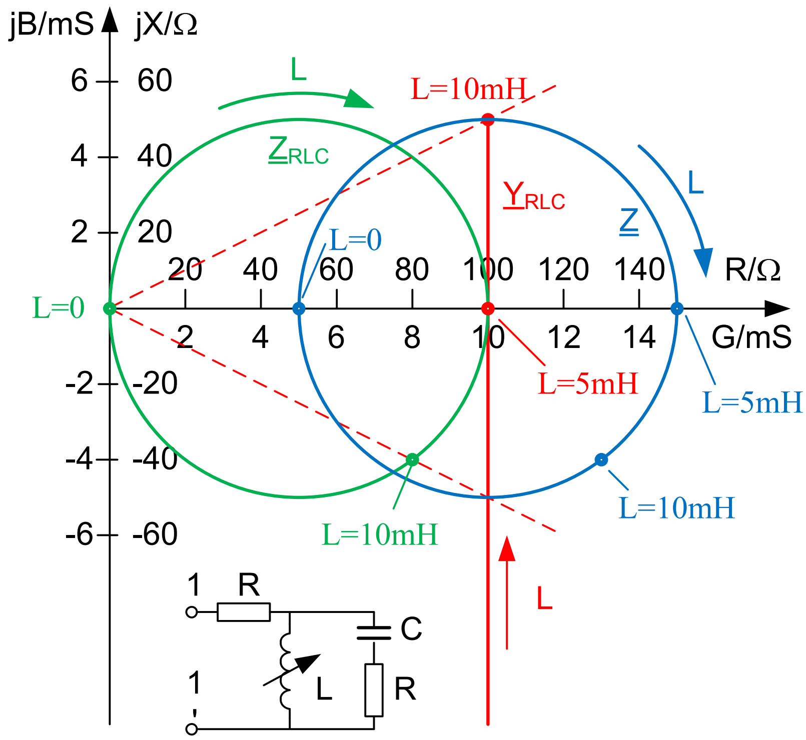
3. Impedanz $\underline{Z} = \underline{Z}_{RL} + R_1 - \frac{j}{\omega C}$ konstruieren (Verschiebung Teilkreis → blau).



**9.3.6** 1. Admittanz $\underline{Y}_{LRC} = \dfrac{1}{R - j/\omega C} - j/\omega L = 10mS + j10mS - \dfrac{j50mS}{L/mH}$ zeichnen (rot).

2. Impedanz $\underline{Z}_{RLC} = 1/\underline{Y}_{RLC}$ konstruieren (Invertierung → grün).

3. Impedanz $\underline{Z} = \underline{Z}_{RLC} + R$ konstruieren (Verschiebung → blau).



**9.3.5** a) Berechnung des Gesamtleitwertes:

$$\underline{Y} = j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L} = j\omega C + \frac{R - j\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} = \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} + j\left(\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}\right)$$

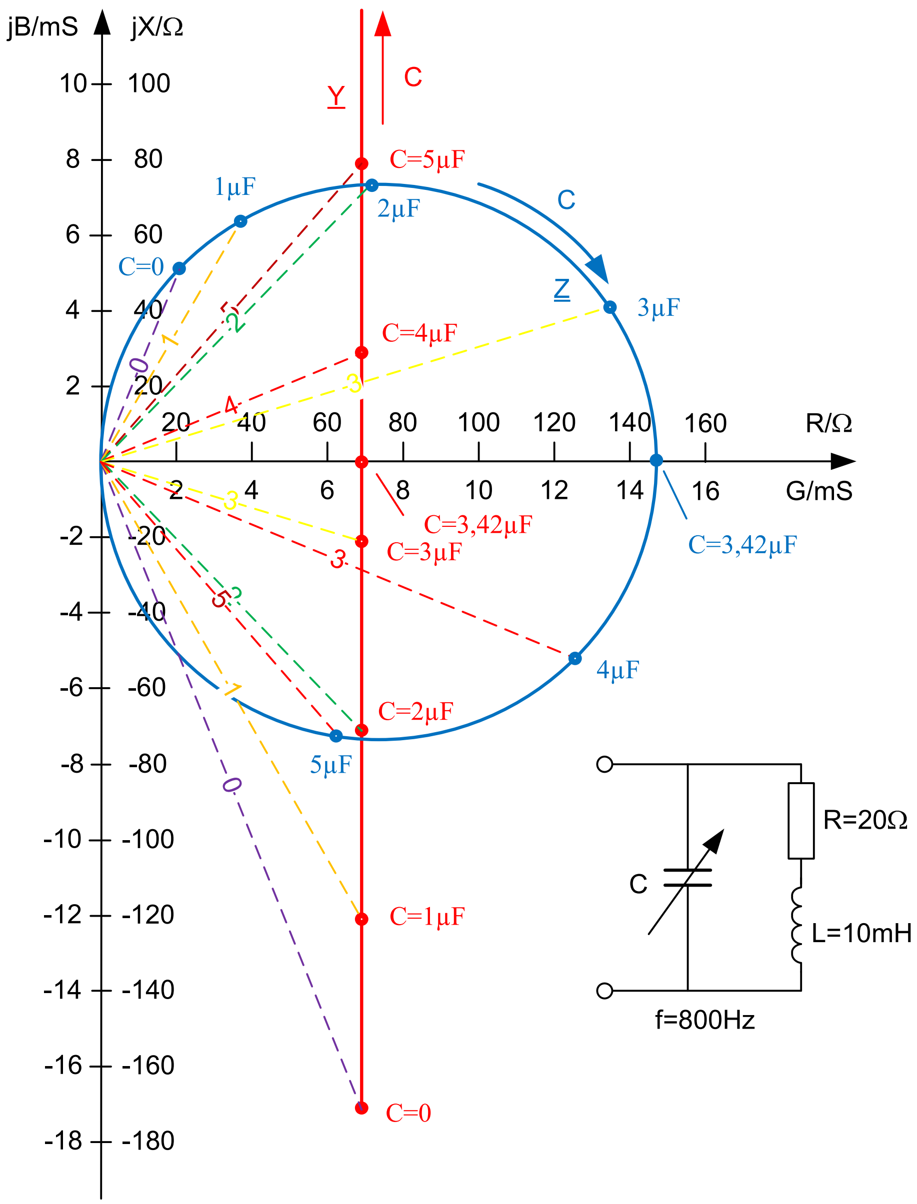
$$\text{Resonanz: } \operatorname{Im}\{\underline{Y}\} = 0 \rightarrow \omega_0 C - \frac{\omega_0 L}{R^2 + (\omega_0 L)^2} = 0$$

$$C = \frac{L}{R^2 + (\omega_0 L)^2} = \frac{10\text{mH}}{(20\Omega)^2 + (2\pi \cdot 800\text{Hz} \cdot 10\text{mH})^2} = 3{,}42\mu\text{F}$$

b) Ortskurvenkonstruktion des Leitwertes für variables C bei f = 800 Hz

$$\underline{Y} = j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L} = j2\pi \cdot 800\text{Hz} \cdot C + \frac{1}{20\Omega + j2\pi \cdot 800\text{Hz} \cdot 10\text{mH}}$$

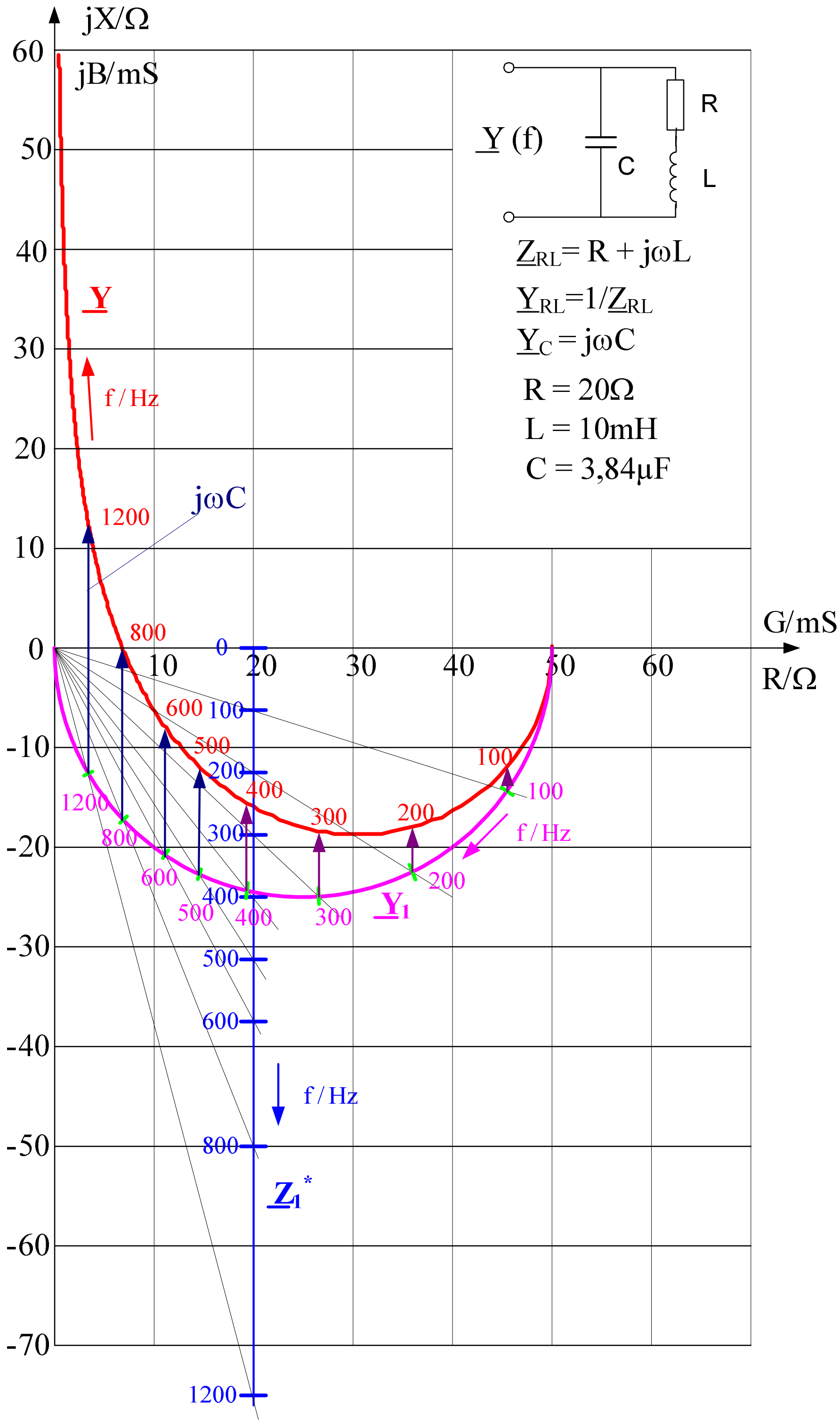
$$= +6{,}83\text{mS} - j17{,}2\text{mS} + j5{,}027\text{mS} \cdot C / \mu\text{F}$$



c) Ortskurvenkonstruktion für variable Frequenz bei C = 3,42µF

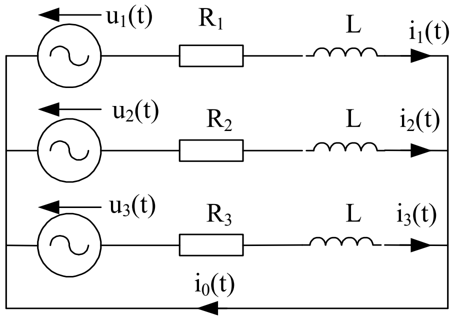
$$\underline{Y} = j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L} = j21{,}5\text{mS} \cdot f / 1\text{kHz} + \frac{1}{20\Omega + j62{,}8\Omega \cdot f / \text{kHz}}$$

Diese Ortskurve lässt sich durch Addition von zwei frequenzabhängigen Ortskurven darstellen: $\underline{Y} = \underline{Y}_C(f) + \underline{Y}_{RL}(f)$
Dabei muss der Leitwert $\underline{Y}_{RL}(f)$ erst durch Invertierung der Impedanz $Z_{RL} = R + j\omega L$ konstruiert werden.



**9.4.1**

**a)**




$R_1 = 100\ \Omega \qquad R_2 = 200\ \Omega$

$R_3 = 400\ \Omega \qquad L = 0{,}63662\ \mathrm{H}$

$u_1(t) = 135\mathrm{V}\cos(\omega t + 60°)$

$f = 50\mathrm{Hz}$

$$\underline{U}_1 = \frac{135\mathrm{V}}{\sqrt{2}} e^{j60°} = 95{,}46 e^{j60°}$$

$$\underline{U}_2 = \frac{135\mathrm{V}}{\sqrt{2}} e^{-j60°} = 95{,}46 e^{-j60°}$$

$$\underline{U}_3 = \frac{135\mathrm{V}}{\sqrt{2}} e^{-j180°} = 95{,}46 e^{-j180°}$$

$$\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L = 100\Omega + j200\Omega = 223{,}6\Omega e^{j63{,}4°}$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 + j\omega L = 200\Omega + j200\Omega = 282{,}8\Omega e^{j45°}$$

$$\underline{Z}_3 = R_3 + j\omega L = 400\Omega + j200\Omega = 447{,}2\Omega e^{j26{,}6°}$$

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1} = \frac{95{,}46\mathrm{V}e^{j60°}}{223{,}6\Omega e^{j63{,}4°}} = 0{,}427\mathrm{A}e^{-j3{,}4°}$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_2} = \frac{95{,}46\mathrm{V}e^{-j60°}}{282{,}8\Omega e^{j45°}} = 0{,}337\mathrm{A}e^{-j105°}$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_3}{\underline{Z}_3} = \frac{95{,}46\mathrm{V}e^{-j180°}}{447{,}2\Omega e^{j26{,}6°}} = 0{,}213\mathrm{A}e^{-j206{,}6°}$$

$$\underline{I}_0 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0{,}295 e^{-j59{,}8°}$$

$$i_1(t) = 0{,}604\,A \cdot \cos(\omega t - 3{,}4°)$$
$$i_2(t) = 0{,}477\,A \cdot \cos(\omega t - 105°)$$
$$i_3(t) = 0{,}301\,A \cdot \cos(\omega t - 206{,}6°)$$
$$i_0(t) = 0{,}417\,A \cdot \cos(\omega t - 59{,}8°)$$

b)

$$\underline{S}_1 = \underline{U}_1 \cdot I_1^* = 95{,}46\mathrm{V}e^{j60°} \cdot 0{,}427\mathrm{A}e^{j3{,}4°} = 40{,}46\mathrm{VA}e^{j63{,}4°} = 18{,}25\mathrm{W} + j36{,}4\mathrm{Var}$$

$$\underline{S}_2 = \underline{U}_2 \cdot I_2^* = 95{,}46\mathrm{V}e^{-j60°} \cdot 0{,}337\mathrm{A}e^{j105°} = 32{,}17\mathrm{VA}e^{j45°} = 22{,}75\mathrm{W} + j22{,}75\mathrm{Var}$$

$$\underline{S}_3 = \underline{U}_3 \cdot I_3^* = 95{,}46\mathrm{V}e^{-j180°} \cdot 0{,}213\mathrm{A}e^{j206{,}6°} = 20{,}33\mathrm{VA}e^{j45°} = 18{,}18\mathrm{W} + j9{,}1\mathrm{Var}$$

$$S = 90{,}33\,VA$$
$$P = 59{,}18\,W$$
$$Q = 68{,}25\,VAr \text{ (induktiv)}$$

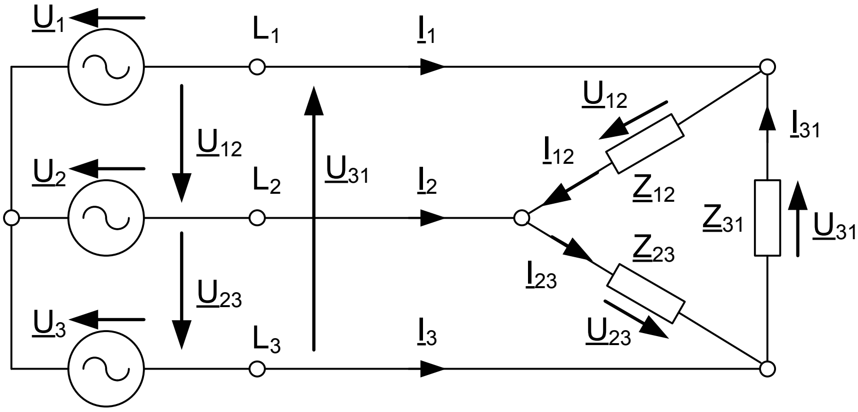
**9.4.2**

a) Ersatzschaltbild

380V-Netz

1)
$\underline{Z}_{12} = 19\ \Omega$
$\underline{Z}_{23} = -j19\ \Omega$
$\underline{Z}_{31} = j19\ \Omega$

2)
$\underline{Z}_{12} = 4\ \Omega$
$\underline{Z}_{23} = 6\ \Omega$
$\underline{Z}_{31} = 8\ \Omega$




b1)

$$\underline{U}_1 = \frac{380\text{V}}{\sqrt{3}} = 220\text{V};\quad \underline{U}_{12} = 380\text{Ve}^{j30°}$$

$$\underline{U}_2 = 220\text{Ve}^{-j120°};\quad \underline{U}_{23} = 380\text{Ve}^{-j90°}$$

$$\underline{U}_3 = 220\text{Ve}^{-j240°};\quad \underline{U}_{31} = 380\text{Ve}^{-j210°}$$

$$\underline{I}_{12} = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}_{12}} = \frac{380\text{Ve}^{j30°}}{19\Omega} = 20\text{Ae}^{j30°} = 17{,}32\text{A} + j10\text{A}$$

$$\underline{I}_{23} = \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}_{23}} = \frac{380\text{Ve}^{-j90°}}{19\Omega\text{e}^{-j90°}} = 20\text{A}$$

$$\underline{I}_{31} = \frac{\underline{U}_{31}}{\underline{Z}_{31}} = \frac{380\text{Ve}^{-j210°}}{19\Omega\text{e}^{j90°}} = 20\text{Ae}^{-j60°} = 10\text{A} + j17{,}32\text{A}$$

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31} = 17{,}32\text{A} + j10\text{A} - 10\text{A} - j17{,}32\text{A} = 7{,}32\text{A} - j7{,}32\text{A} = 10{,}35\text{Ae}^{-j45°}$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_{23} - \underline{I}_{12} = 20\text{A} - 17{,}32\text{A} - j10\text{A} = 2{,}68\text{A} - j10\text{A} = 10{,}35\text{Ae}^{-j75°}$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_{31} - \underline{I}_{23} = 10\text{A} + j17{,}32\text{A} - 20\text{A} = -10\text{A} + j17{,}32\text{A} = 20\text{Ae}^{j120°}$$

c1)

$$\underline{S} = \underline{U}_{12} \cdot \underline{I}_{12}^* + \underline{U}_{21} \cdot \underline{I}_{21}^* + \underline{U}_{31} \cdot \underline{I}_{31}^*$$

$$= 380\text{Ve}^{j30°} \cdot 20\text{Ae}^{-j30°} + 380\text{Ve}^{-j90°} \cdot 20\text{A} + 380\text{Ve}^{-j210°} \cdot 20\text{Ae}^{-j60°}$$

$$= \left(7600 - j7600 + j7600\right)\text{VA} = 7600\text{W}$$

$$P = 7600\text{W};\quad Q = 0$$

b2) $\underline{I}_{12} = 95{,}26\ \text{A} \cdot \text{e}^{j30°};\quad \underline{I}_{23} = 63{,}51\ \text{A} \cdot \text{e}^{-j90°};\quad \underline{I}_{31} = 47{,}63\ \text{A} \cdot \text{e}^{j150°}$

$\underline{I}_1 = 126\ \text{A} \cdot \text{e}^{j10{,}9°};\quad \underline{I}_2 = 138{,}4\ \text{A} \cdot \text{e}^{-j126{,}6°};\quad \underline{I}_3 = 96{,}6\ \text{A} \cdot \text{e}^{j115{,}3°}$

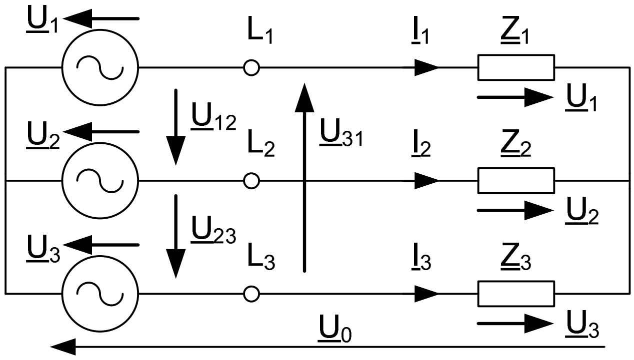
c2) $S = 78{,}65\,kVA$; $P = 78{,}65\,kW$; $Q = 0\,VAr$

**9.4.3**

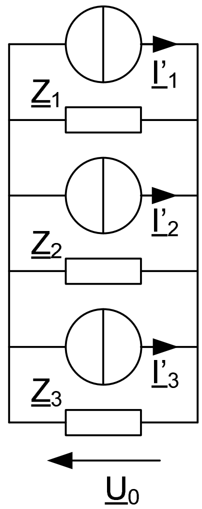
a) Ersatzschaltbild

1) $\underline{Z}_1 = 10\ \Omega$
$\underline{Z}_2 = 20\ \Omega$
$\underline{Z}_3 = 30\ \Omega$

2) $\underline{Z}_1 = 30\ \Omega$
$\underline{Z}_2 = 20\ \Omega$
$\underline{Z}_3 = 10\ \Omega$




b1) Strang- und Leiterströme sind identisch!
Zur Berechnung der Strangspannungen $\underline{U}_i$ ist die Kenntnis der Hilfsspannung $\underline{U}_0$ erforderlich. Dazu werden die drei Spannungsquellen und ihre zugehörigen Lasten in äquivalente Stromquellen gewandelt.



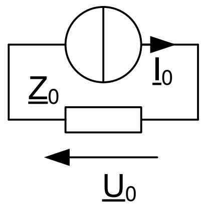

380V-Netz →

$$\underline{U}_1 = \frac{380\text{V}}{\sqrt{3}} = 220\text{V}\ ;\ \underline{U}_2 = 220\text{Ve}^{-j120°};\ \underline{U}_3 = 220\text{Ve}^{-j240°}$$

$$\underline{I}'_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1} = \frac{220\text{V}}{10\Omega} = 22\text{A}\ ;\ \underline{I}'_2 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_2} = 11\text{Ae}^{-j120°};$$

$$\underline{I}'_3 = \frac{\underline{U}_3}{\underline{Z}_3} = 7{,}33\text{Ae}^{-j240°}$$

Der Gesamtstrom $\underline{I}_0$ erzeugt am Gesamtwiderstand $\underline{Z}_0$ die Spannung $\underline{U}_0$.




$$\underline{I}_0 = \underline{I}'_1 + \underline{I}'_2 + \underline{I}'_3 = 13{,}2\text{Ae}^{-j13{,}9°}$$

$$\frac{1}{\underline{Z}_0} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3}\ ;\ \underline{Z}_0 = 5{,}45\Omega$$

$$\underline{U}_0 = \underline{I}_0\underline{Z}_0 = 13{,}2\text{Ae}^{j13{,}9°} \cdot 5{,}45\Omega = 72{,}1\text{Ve}^{-j13{,}9°}$$

Damit lassen sich die Leiterströme berechnen zu:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1 - \underline{U}_0}{\underline{Z}_1} = \frac{220\text{V} - 72{,}1\text{Ve}^{-j13{,}9°}}{10\Omega} = \frac{151\text{Ve}^{j6{,}6°}}{10\Omega} = 15{,}1\text{Ae}^{j6{,}6°}$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2 - \underline{U}_0}{\underline{Z}_2} = \frac{220\text{Ve}^{-j120°} - 72{,}1\text{Ve}^{-j13{,}9°}}{20\Omega} = \frac{250\text{Ve}^{-j136°}}{20\Omega} = 12{,}5\text{Ae}^{-j136°}$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_3 - \underline{U}_0}{\underline{Z}_3} = \frac{220\text{Ve}^{-j240°} - 72{,}1\text{Ve}^{-j13{,}9°}}{30\Omega} = \frac{275\text{Ve}^{j131°}}{30\Omega} = 9{,}16\text{Ae}^{j131°}$$

b2) $\underline{I}_1 = 9{,}16\,A \cdot e^{-j10{,}9°}$; $\underline{I}_2 = 12{,}5\,A \cdot e^{-j104°}$; $\underline{I}_3 = 15{,}1\,A \cdot e^{j113°}$

c1) Die Scheinleistung der Gesamtschaltung berechnet sich aus der Summe der Einzelleistungen:

$$\underline{S}_1 = \underline{U}_{Z1} \cdot \underline{I}_1^* = 151\text{Ve}^{j6{,}6°} \cdot 15{,}1\text{Ae}^{-j6{,}6°} = 2{,}28\text{kW}$$

$$\underline{S}_2 = \underline{U}_{Z2} \cdot \underline{I}_2^* = 250\text{Ve}^{-j136°} \cdot 12{,}5\text{Ae}^{j136°} = 3{,}125\text{kW}$$

$$\underline{S}_3 = \underline{U}_{Z3} \cdot \underline{I}_3^* = 275\text{Ve}^{j131°} \cdot 9{,}16\text{Ae}^{-j131°} = 2{,}52\text{kW}$$

$$\underline{S} = \underline{S}_1 + \underline{S}_2 + \underline{S}_3 = 7{,}925\text{kW}\ ;\ \text{P} = 7{,}925\text{kW}\ ;\ \text{Q} = 0\text{Var}$$

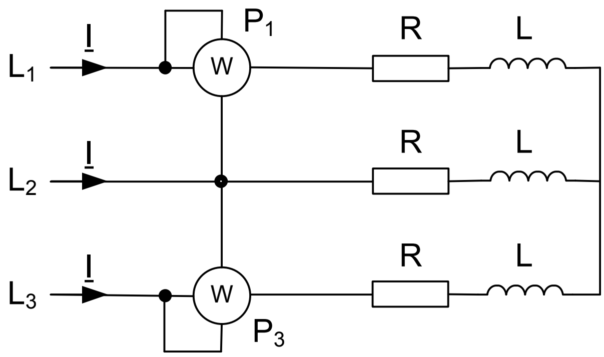
c2) $S = 7925\,VA$ ; $P = 7925\,W$ ; Q = 0 Var

**9.4.4**

a) Ersatzschaltbild

1) $P_1$ = 20 kW
$P_3$ = 40 kW

2) $P_1$ = 60 kW
$P_3$ = 10 kW




b1) Die Aronschaltung liefert folgende Ergebnisse:

$$P_{ges} = P_1 + P_3 = 60\text{kW}$$

$$Q_{ges} = \sqrt{3} \cdot |P_1 - P_3| = 36{,}64\text{kVar}$$

$$|\underline{S}| = \sqrt{P^2 + Q^2} = 69{,}26\text{kVA}$$

Mit $|\underline{S}| = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L$ lässt sich dann der Leiterstrom $I_L$ berechnen:

$$I_L = \frac{S}{\sqrt{3} \cdot U_L} = \frac{69{,}28\text{kVA}}{\sqrt{3} \cdot 380\text{V}} = 105{,}3\text{A}$$

b2) $P = 70$ kW ; $Q = 86{,}6$ kVAr ; $S = 111{,}4$ kVA ; $I_L = 169{,}2$ A

c1) Aus der Wirk- und Blindleistung und dem Leiterstrom $I_L$ kann die komplexe Impedanz der Einzellast R + jωL berechnet werden:

$$P_1 = \frac{1}{3} P = 20\text{kW} = I_1^2 \cdot R; \; Q_1 = \frac{1}{3} Q = 11{,}55\text{KVar} = I_1^2 \cdot \omega L$$

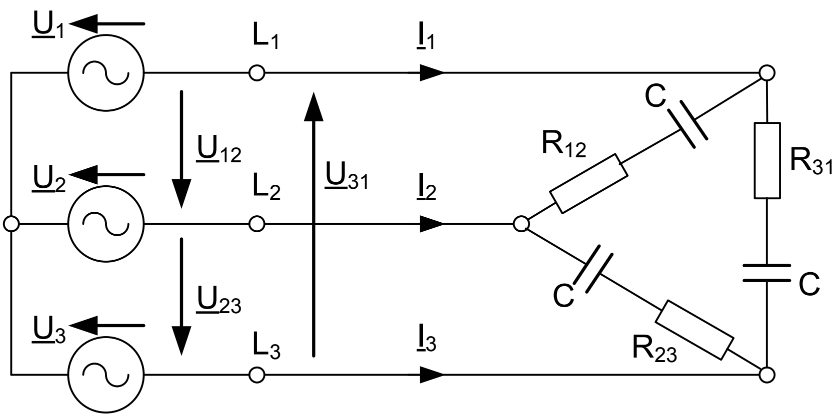
$$R = \frac{P_1}{I_1^2} = \frac{20\text{kW}}{(105{,}3\text{A})^2} = 1{,}8\Omega$$

$$L = \frac{Q_1}{2\pi f \cdot I_1^2} = \frac{11{,}55\text{kVar}}{2\pi \cdot 50\text{Hz} \cdot (105{,}3\text{A})^2} = 3{,}31\text{mH}$$

c2) $R = 0{,}815\ \Omega$ ; $L = 3{,}21$ mH

**9.4.5**

a) $R_{12} = 10\Omega$;
$R_{23} = 20\Omega$;
$R_{31} = 40\Omega$;
$C = 127{,}3\ \mu F$;
$f = 50\ Hz$
$u_1(t) = 332V\cos(\omega t)$




$$\underline{U}_1 = 235V;\ \underline{U}_2 = 235Ve^{-j120°};\ \underline{U}_3 = 235Ve^{-j240°}$$

$$\underline{U}_{12} = 407Ve^{j30°};\ \underline{U}_{23} = 407Ve^{-j90°};\ \underline{U}_{31} = 407Ve^{-j210°}$$

$$\underline{Z}_{12} = R_{12} - j/\omega C = 10\Omega - j25\Omega;\ \underline{Z}_{23} = 20\Omega - j25\Omega;\ \underline{Z}_{31} = 40\Omega - j25\Omega$$

$$\underline{I}_{12} = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}_{12}} = \frac{407Ve^{j30°}}{10\Omega - j25\Omega} = 15{,}1Ae^{j98{,}2°};\ \underline{I}_{23} = \frac{407Ve^{-j90°}}{20\Omega - j25\Omega} = 12{,}7Ae^{-j37{,}7°};$$

$$\underline{I}_{31} = \frac{407Ve^{-j210°}}{40\Omega - j25\Omega} = 8{,}63Ae^{-j178°}$$

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31} = 15{,}1Ae^{j98{,}2°} - 8{,}63Ae^{-j178°} = 16{,}6Ae^{j67°}$$
$$\underline{I}_2 = \underline{I}_{23} - \underline{I}_{12} = 12{,}7Ae^{-j37{,}7°} - 15{,}1Ae^{j98{,}2°} = 25{,}8Ae^{-j61{,}8°}$$
$$\underline{I}_3 = \underline{I}_{31} - \underline{I}_{23} = 8{,}63Ae^{-j178°} - 12{,}7Ae^{-j37{,}7°} = 20{,}3Ae^{j156{,}6°}$$

$$i_1(t) = 23{,}5\ A \cdot \cos(\omega t + 67°)$$
$$i_2(t) = 36{,}5\ A \cdot \cos(\omega t - 61{,}8°)$$
$$i_3(t) = 28{,}76\ A \cdot \cos(\omega t + 156{,}6°)$$

b)

$$\underline{S} = \underline{U}_{12} \cdot \underline{I}_{12}^* + \underline{U}_{23} \cdot \underline{I}_{23}^* + \underline{U}_{31} \cdot \underline{I}_{31}^*$$
$$= 407e^{j30°} \cdot 15{,}1Ae^{-j98{,}2°} + 407e^{-j90°} \cdot 12{,}7Ae^{j37{,}7°} + 407e^{-j210°} \cdot 8{,}63Ae^{j178°}$$
$$= (2{,}28 - j5{,}71 + 3{,}16 - j4{,}09 + 2{,}98 - j1{,}86)kVA = (8{,}42 - j11{,}66)kVA$$
$$P = 8{,}42kW;\ Q = 11{,}66kVar\ \text{(kapazitiv)}$$

**9.5.1**

1) Masche:

$$-U_q + u_R(t) + u_C(t) = 0$$ Spannungen durch Strom i ersetzen:

$$-U_q + i(t)\cdot R + \frac{1}{C}\int i(t)dt + U_{C0} = 0$$ Gl. differenzieren:

$$0 + R\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\cdot i(t) = 0$$ homogene DGL!

2) Lösung der homogenen DGL:

$$R\frac{di(t)}{dt} = -\frac{1}{C}\cdot i(t)$$

$$\frac{1}{i(t)}di(t) = -\frac{1}{RC}dt$$ Integrieren:

$$\int\frac{1}{i(t)}dt = -\frac{1}{RC}\int dt$$

$$\ln\left[i(t)\right] = -\frac{1}{RC}\cdot t + k'$$ Auflösen nach i(t):

$$i(t) = e^{\left(-\frac{t}{RC}+k'\right)} = e^{-\frac{t}{RC}}\cdot e^{k'} = K\cdot e^{-\frac{t}{\tau}};\quad \text{mit } K = e^{k'} \text{ und } \tau = RC$$

Bestimmung der Konstanten K:
Die Spannung am Kondensator kann sich nicht sprunghaft ändern $u_C(0_-) = u_C(0_+)$:

a) Anfangsbedingung: $u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0V$

Aus Maschengleichung folgt: $i(0_+) = \frac{U_q}{R}$

Aus DGL. folgt: $i(0) = K$

$\rightarrow$ $K = \frac{U_q}{R}$

Somit gilt für i(t): $i(t) = \frac{U_q}{R}\cdot e^{-\frac{t}{\tau}};\quad \text{mit } \tau = RC = 0,5ms$

$$i(t) = 0,2mA\cdot e^{\frac{-t}{0,5ms}}$$

b) Anfangsbedingung: $u_C(0_+) = u_C(0_-) = 3V$

Aus Maschengleichung folgt: $i(0_+) = \frac{U_q - u_C(0_+)}{R}$

Aus DGL. folgt: $i(0_+) = K$

$\rightarrow$ $K = \frac{U_q - u_C(0_+)}{R} = \frac{10V - 3V}{50k\Omega} = 0,14mA$

Somit gilt für i(t): $i(t) = \frac{U_q - u_C(0_+)}{R}\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$

$$i(t) = 0,14mA\cdot e^{\frac{-t}{0,5ms}}$$

3) $$u_R(t) = R \cdot i(t);\ u_C(t) = U_q - u_R(t)$$

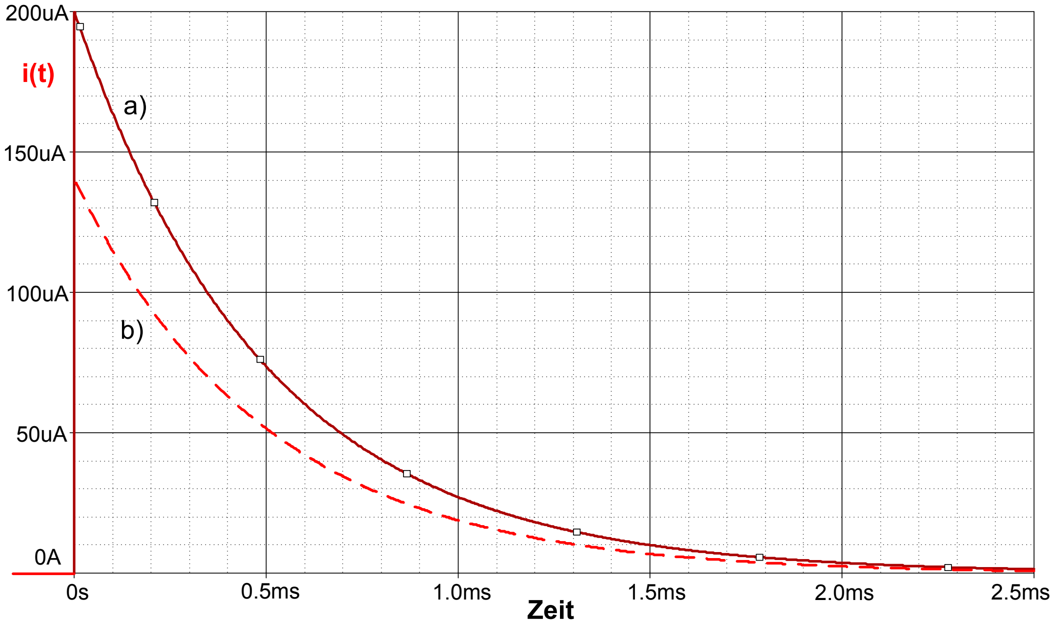
a) $$u_R(t) = 50k\Omega \cdot 0{,}2mA \cdot e^{\frac{-t}{0{,}5ms}} = 10V \cdot e^{\frac{-t}{0{,}5ms}}$$

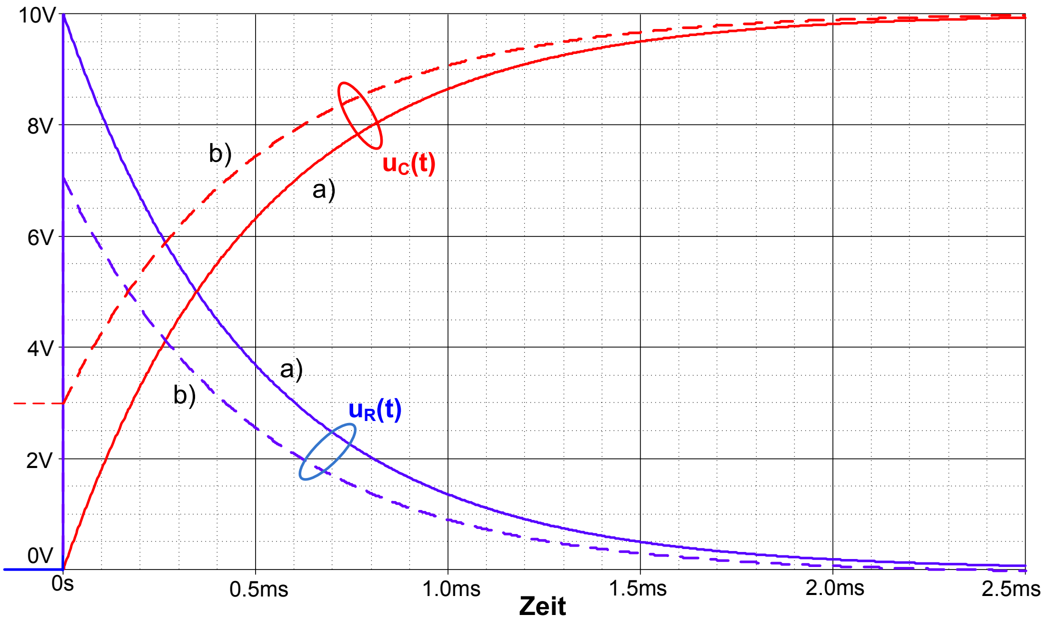
$$u_C(t) = 10V - 10V \cdot e^{\frac{-t}{0{,}5ms}} = 10V\left(1 - e^{\frac{-t}{0{,}5ms}}\right)$$

b) $$u_R(t) = 50k\Omega \cdot 0{,}14mA \cdot e^{\frac{-t}{0{,}5ms}} = 7V \cdot e^{\frac{-t}{0{,}5ms}}$$

$$u_C(t) = 10V - 7V \cdot e^{\frac{-t}{0{,}5ms}}$$

4a)



**9.5.2**

Für 0 s ≤ t ≤ 21,5 ms gilt (Schalter wird geschlossen):

$$U_q = u_{R2}(t) + u_L(t)$$

$$U_q = R_2 \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt};\ (1)\ \text{inhomogene DGL!}$$

$$U_q = R_2 \cdot i_e(t) + L \cdot \frac{di_e(t)}{dt};\ (2)\ i_e = \text{Lösung für eingeschw. Zustand}$$

$$0 = R_2 \cdot i_f(t) + L \cdot \frac{di_f(t)}{dt};\ \ (1)\text{-}(2)\text{: } i_f(t) = i(t) - i_e(t)\ \text{"flüchtiger" Strom} \Rightarrow \text{homogene DGL!}$$

Lösung der homogenen DGL:

$$0 = i_f(t) + \frac{L}{R_2} \cdot \frac{di_f(t)}{dt} \Rightarrow i_f(t) = K_1 \cdot e^{\frac{-t}{\tau_1}};\ \text{mit } \tau_1 = \frac{L}{R_2}$$

Bestimmung von $K_1$ mit der Anfangsbedingung $i(0_-) = 0$ und dass sich der Strom in einer Induktivität nicht sprunghaft ändern kann:

$$i(0_+) = i_e(0_+) + i_f(0_+) = i(0_-) = 0\text{A}$$

$$i_e(0_+) = \frac{U_q}{R_2};\ \text{eingeschwungener Zustand gilt auch für } t \to \infty$$

$$K_1 = i_f(0_+) = i(0_-) - i_e(0_+) = 0\text{A} - \frac{U_q}{R_2} = -\frac{U_q}{R_2}$$

Damit ist der zeitliche Verlauf des „flüchtigen“ Stromes gegeben mit:

$$i_f(t) = -\frac{U_q}{R_2} \cdot e^{\frac{-t}{\tau_1}};\ \text{mit } \tau_1 = \frac{L}{R_2}$$

und somit auch der Strom i(t):

$$i(t) = i_e(t) + i_f(t) = \frac{U_q}{R_2} - \frac{U_q}{R_2} \cdot e^{\frac{-t}{\tau_1}} = \frac{U_q}{R_2}\left(1 - e^{\frac{-t}{\tau_1}}\right);\ \text{mit } \tau_1 = \frac{L}{R_2}$$

$$i(t) = \frac{12\text{V}}{10\Omega} \cdot \left(1 - e^{\frac{-t}{\tau_1}}\right) = 1{,}2\text{A} \cdot \left(1 - e^{\frac{-t}{\tau_1}}\right);\ \text{mit } \tau_1 = \frac{L}{R_2} = \frac{1{,}12\text{H}}{10\Omega} = 12\text{ms}$$

Damit berechnet sich die Spannung $u_L(t)$ zu:

$$u_L(t) = U_q - R_2 \cdot i(t) = 12\text{V} - 10\Omega \cdot 1{,}2\text{A} \cdot e^{\frac{-t}{\tau_1}} = 12\text{V}\left(1 - e^{\frac{-t}{\tau_1}}\right);\ \text{mit } \tau_1 = 12\text{ms}$$

$u_{R1}$ liegt bei geschlossenem Schalter direkt an der Spannungsquelle:

$$u_{R1}(t) = U_q = 12\text{V}$$

Für t ≥ 21,5 ms gilt (Schalter wird geöffnet):

Zur Ermittlung der Anfangszustände für t = 21,5 ms werden mit den obigen Bestimmungsgleichungen die Strom- und Spannungswerte zu diesem Zeitpunkt ermittelt:

$$i(t = 21,5ms) = 1,2A \cdot \left(1 - e^{\frac{-21,5ms}{12ms}}\right) = 1A$$

$$u_L(t = 21,5ms) = 12V\left(1 - e^{\frac{-21,5ms}{12ms}}\right) = 2V$$

$$u_{R1}(t = 21,5ms) = 12V$$

Die Berechnung der Zeitfunktionen wird für diesen Zeitraum einfach, wenn eine Zeittransformation vorgenommen wird: t' = t – 21,5 ms.

Die DGL für die Schaltung bei geöffnetem Schalter lautet:

$$R_1 \cdot i(t') + R_2 \cdot i(t') + L \cdot \frac{di(t')}{dt} = 0; \text{ homogene DGL!}$$

$$\left(R_1 + R_2\right) \cdot i(t') + L \cdot \frac{di(t')}{dt} = 0$$

$$i(t') + \frac{L}{R_1 + R_2} \cdot \frac{di(t')}{dt} = 0; \text{ Lösung} \Rightarrow$$

$$i(t') = K_2 \cdot e^{\frac{-t'}{\tau_2}}; \text{ mit } \tau_2 = \frac{L}{R_1 + R_2}$$

Bestimmung der Konstanten $K_2$ aus den Anfangsbedingungen zur Zeit t = 21,5 bzw. t' = 0 ms:

$$i(t' = 0_+) = K_2 = i(t' = 0_-) = 1A \Rightarrow$$

$$i(t) = 1\ A \cdot e^{-\frac{t-21,5\ ms}{2,4\ ms}}; \quad u_L(t) = -50\ V \cdot e^{-\frac{t-21,5\ ms}{2,4\ ms}}; \quad u_{R1}(t) = -40\ V \cdot e^{-\frac{t-21,5\ ms}{2,4\ ms}}$$

$$i(t') = 1A \cdot e^{\frac{-t'}{\tau_2}}; \text{ mit } \tau_2 = \frac{L}{R_1 + R_2} = \frac{0,12H}{50\Omega} = 2,4ms$$

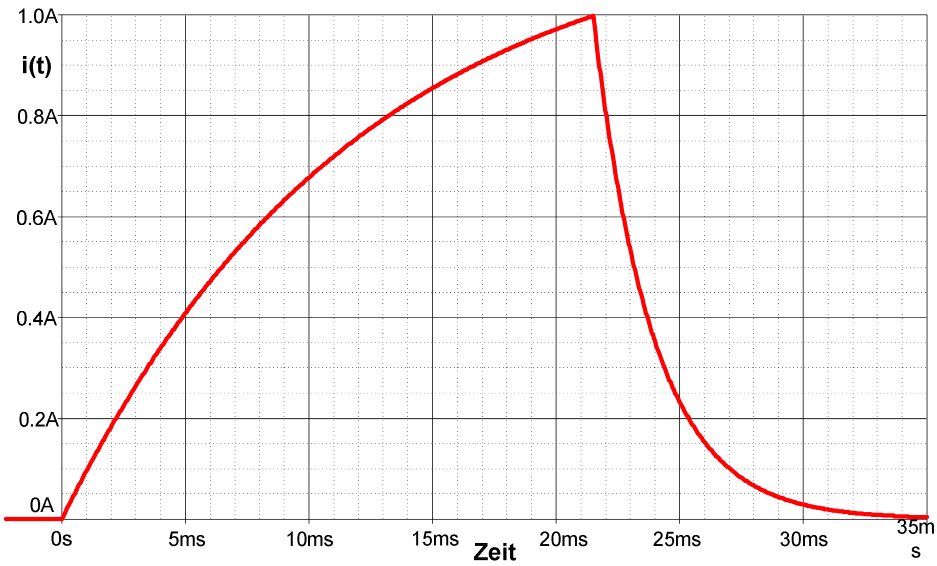
$$i(t) = 1A \cdot e^{-\frac{t-21,5ms}{2,4ms}}$$

Aus der Schaltung lassen sich die Spannungen $u_{R1}$ und $u_L$ berechnen zu:

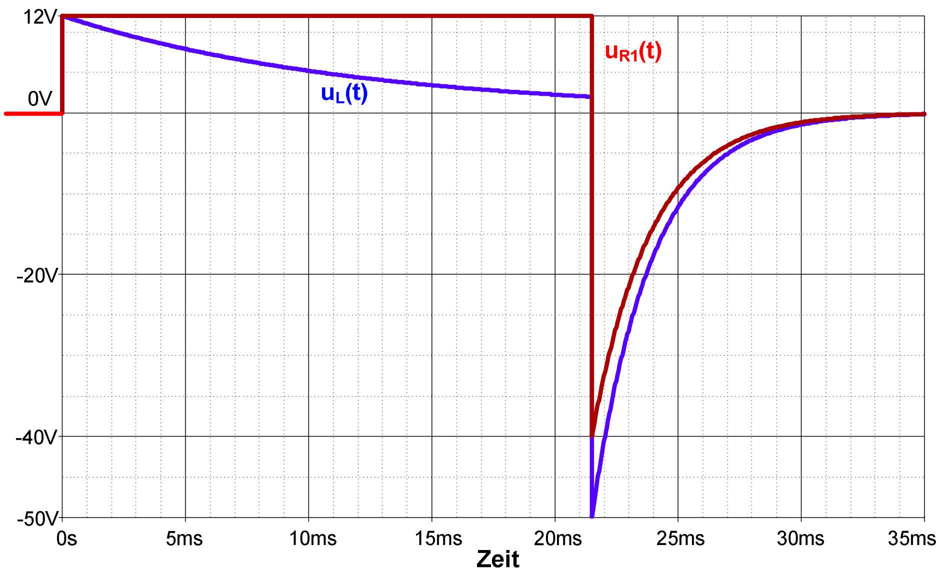
$$u_{R1}(t) = -R_1 \cdot i(t) = -40\Omega \cdot 1A \cdot e^{-\frac{t-21,5ms}{\tau_2}} = -40 \cdot Ve^{-\frac{t-21,5ms}{2,4ms}}$$

$$u_L(t) = u_{R1}(t) - u_{R2}(t) = -R_1 \cdot i(t) - R_2 \cdot i(t) = -50\Omega \cdot 1A \cdot e^{-\frac{t-21,5ms}{\tau_2}}$$

$$u_L(t) = -50V \cdot e^{-\frac{t-21,5ms}{2,4ms}}$$



1.0A
i(t)
0.8A
0.6A
0.4A
0.2A
0A
0s
5ms
10ms
15ms
Zeit
20ms
25ms
30ms
35ms

12V
0V
-20V
-40V
-50V
$u_{R1}(t)$
$u_L(t)$
0s
5ms
10ms
15ms
20ms
25ms
30ms
35ms
Zeit

**9.5.3** Die Lösung dieser Aufgabe erfolgt analog zur Lösung in Kapitel 6.3.1.3 gemäß Abb. 6.3.1.3.1. Der Unterschied zur dortigen Lösung ist der Umstand, dass der Kondensator zur Zeit t = 0 auf $u_C(0) = 2$ V aufgeladen ist. Somit muss die Anfangsbedingung (6.3.1.3.12) nun lauten:

$$u_C(0_+) = u_{Ce}(0_+) + u_{Cf}(0_+) = u_C(0_-) = 2V$$

mit $u_{Ce}(0_+) = U_q \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} = 10V \dfrac{30k\Omega}{50k\Omega} = 6V$ folgt für die Integrationskonstante

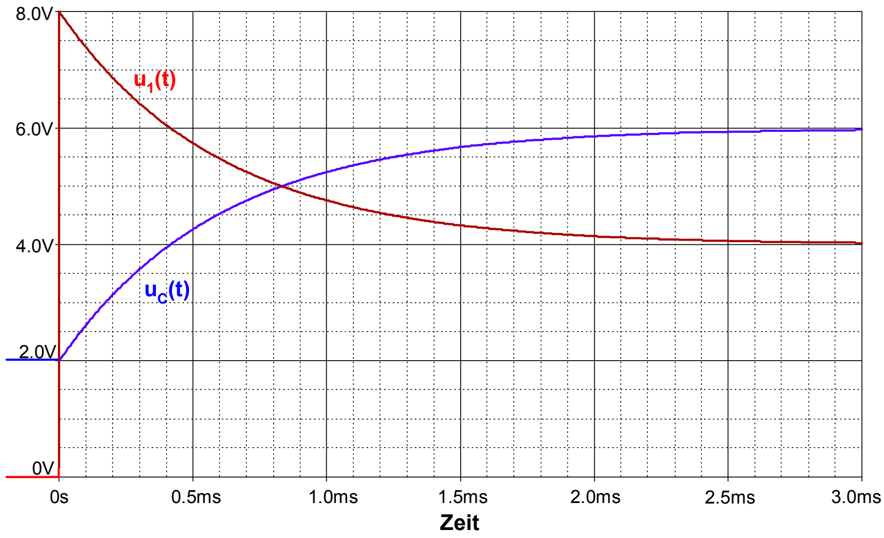
$$K = 2V - 6V = -4V$$

Damit berechnet sich die Kondensatorspannung zu

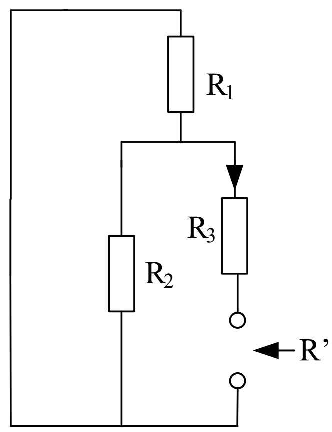
$$u_C(t) = u_{Ce}(t) + u_{Cf}(t) = 6V - 4Ve^{\frac{-t}{\tau}};\ \text{mit } \tau = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} C = 0{,}6ms$$

Die Spannung an $R_1$ kann nun leicht aus der Masche $-U_q + u_1(t) + u_c(t) = 0$ berechnet werden:

$$u_1(t) = U_q - u_c(t) = 10V - \left(6V - 4Ve^{\frac{-t}{\tau}}\right) = 4V\left(1 + e^{\frac{-t}{\tau}}\right)$$




**9.5.4** Diese Aufgabe soll mit Hilfe des vereinfachten Verfahrens für <u>einen</u> Energiespeicher gelöst werden.
Dazu wird die Zeitkonstante τ ermittelt, indem der Ersatzwiderstand R' aus der Schaltung bestimmt wird.



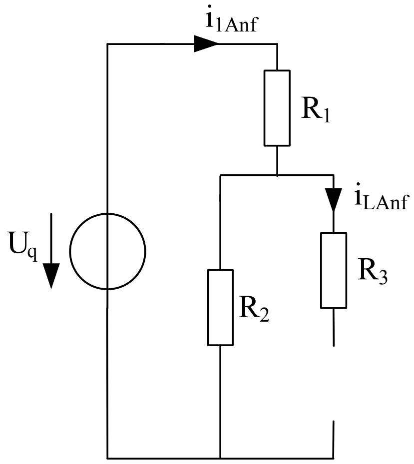

$$R' = R_3 + R_1 \,||\, R_2 = R_3 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

$$= 50\Omega + \frac{20\Omega \cdot 30\Omega}{50\Omega} = 62\Omega$$

Die Zeitkonstante berechnet sich damit zu

$$\tau = \frac{L}{R'} = \frac{310mH}{62\Omega} = 5ms\,.$$

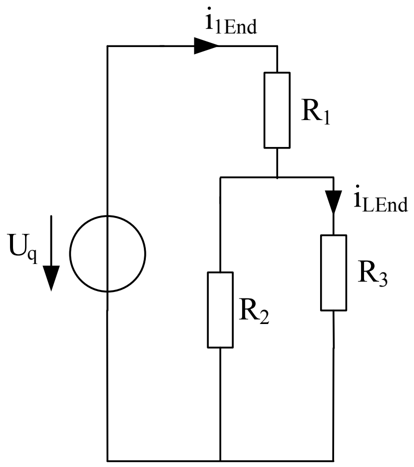
Zur Berechnung der Ströme $i_L(t)$ und $i_1(t)$ werden deren Anfangswerte zum Zeitpunkt t = 0 mit Hilfe eines Gleichstrom-Ersatzbildes ermittelt. Die energielose Spule wird durch einen Leerlauf ersetzt:




$$i_{LAnf} = 0A$$

$$i_{1Anf} = \frac{U_q}{R_1 + R_2} = \frac{15,5V}{50\Omega} = 310mA$$

Die Endwerte der Ströme werden ebenfalls mit einem Gleichstrom-Ersatzbild bestimmt, wobei die Spule durch einen Kurzschluss ersetzt wird.




$$i_{1End} = \frac{U_q}{R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}} = \frac{15,5V}{20\Omega + \frac{30\Omega \cdot 50\Omega}{30\Omega + 50\Omega}} = 400mA$$

$$i_{LEnd} = i_{1End} \frac{R_2}{R_2 + R_3} = 400mA \frac{30\Omega}{80\Omega} = 150mA$$

Nun können die Zeitfunktionen der Ströme direkt bestimmt werden:

$$i_1(t) = i_{1f} + i_{1e} = K_1 \cdot e^{\frac{-t}{\tau}} + 400mA$$

$$i_1(0_+) = K_1 + 400mA = i_{Anf} = 310mA$$

$$K_1 = 310mA - 400mA = -90mA$$

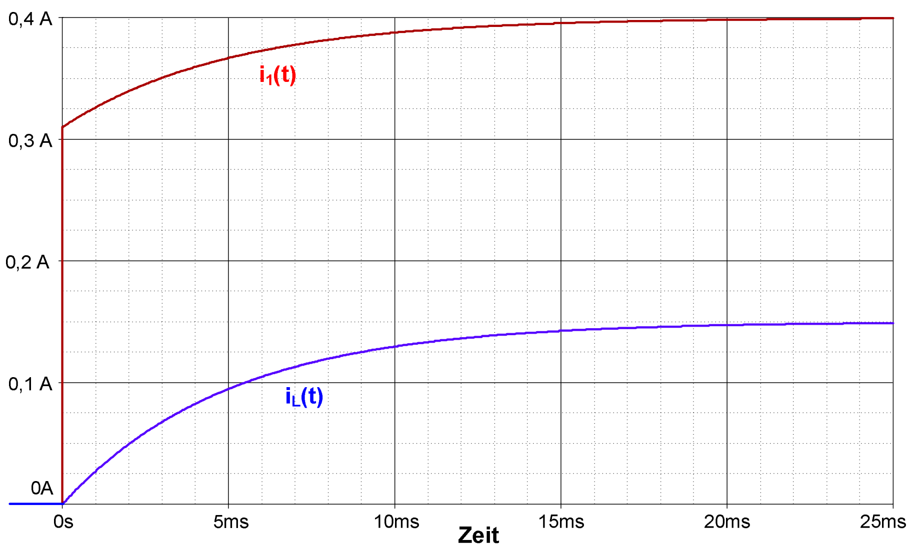
$$i_1(t) = 400mA - 90mA \cdot e^{\frac{-t}{5ms}}$$

$$i_L(t) = i_{Lf} + i_{Le} = K_L \cdot e^{\frac{-t}{\tau}} + 150mA$$

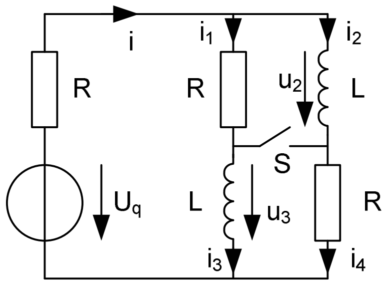
$$i_1(0_+) = K_L + 150mA = i_{Anf} = 0mA$$

$$K_L = -150mA$$

$$i_L(t) = 150mA\left(1 - e^{\frac{-t}{5ms}}\right)$$



**9.5.5**




Diese Aufgabe enthält zwei Energiespeicher. Auf Grund der Symmetrie vor und nach dem Schließen des Schalters werden die Ströme der Spulen und die der Widerstände gleich groß sein, ebenso die Spannungen über den Bauteilen:

$$i_1 = i_4 = i_R;\ \ i_2 = i_3 = i_L \text{ und } u_2 = u_3 = u_L$$

Die Spannungen an den Spulen lassen sich über die Ströme ausdrücken:

$$u_L = L\frac{di_L}{dt}$$

Der Gesamtstrom i wird damit

$$i = i_R + i_L$$

und damit erhält man nach Schließen des Schalters folgende Maschengleichung:

$$U_q = R\cdot i(t) + 2\cdot u_L(t) = R\cdot\left(i_R(t) + i_L(t)\right) + 2\cdot L\frac{di_L(t)}{dt}$$

Nun lässt sich noch $i_R(t)$ durch die Spannung $u_R(t) = u_L(t)$ ausdrücken:

$$i_R(t) = \frac{u_L(t)}{R} = \frac{L}{R}\frac{di_L(t)}{dt}$$

Damit erhält man eine inhomogene DGL für $i_L(t)$:

$$U_q = L\frac{di_L(t)}{dt} + R\cdot i_L(t) + 2\cdot L\frac{di_L(t)}{dt}$$

bzw. $\quad i_L(t) + 3\frac{L}{R}\frac{di_L(t)}{dt} = \frac{U_q}{R}$

Diese DGL löst man nach der bekannten Methode mit der Summation aus eingeschwungenem- und flüchtigem Strom:

$$i_L = i_{Lf} + i_{Le} \text{ mit } i_{Le} = \frac{U_q}{R} \text{ und der homogenen DGL}$$

$$i_{Lf}(t) + 3\frac{L}{R}\frac{di_{Lf}(t)}{dt} = 0$$

Die Lösung der homogenen DGL in $i_{Lf}$ ergibt:

$$i_{Lf}(t) = K\cdot e^{\frac{-t}{\tau}};\ \text{mit } \tau = 3\frac{L}{R}$$

Zur Berechnung der Konstanten K wird die Anfangsbedingung zum Zeitpunkt t = 0 s untersucht. Der eingeschwungene Zustand vor Schließen des Schalters ergibt:

$$i_L(0_-) = \frac{1}{2} \cdot i(0_-) = \frac{1}{2} \cdot \frac{U_q}{R + R/2} = \frac{U_q}{3R} = i_L(0_+) = i_{Le} + i_{Lf}(0_+) = \frac{U_q}{R} + K$$

$$K = \frac{U_q}{3R} - \frac{U_q}{R} = -\frac{2U_q}{3R}$$

Damit lässt sich der zeitliche Verlauf des Spulenstroms angeben zu:

$$i_L(t) = \frac{U_q}{R} - \frac{2U_q}{3R} e^{\frac{-t}{\tau}}; \text{ mit } \tau = \frac{3L}{R}$$

Die Spannung u(t) lässt sich aus $i_L(t)$ berechnen:

$$u(t) = 2 \cdot L \frac{di_L(t)}{dt} = \frac{4}{9} U_q \cdot e^{\frac{-t}{\tau}}$$

Für den Gesamtstrom i(t) ergibt sich daraus:

$$i(t) = \frac{U_q - u(t)}{R} = \frac{U_q}{R} - \frac{4U_q}{9R} e^{\frac{-t}{\tau}}$$

Mit den angegebenen Werten von $U_q = 45$ V, R = 2 kΩ und L = 100mH ergibt sich eine Zeitkonstante von t = 150 µs und

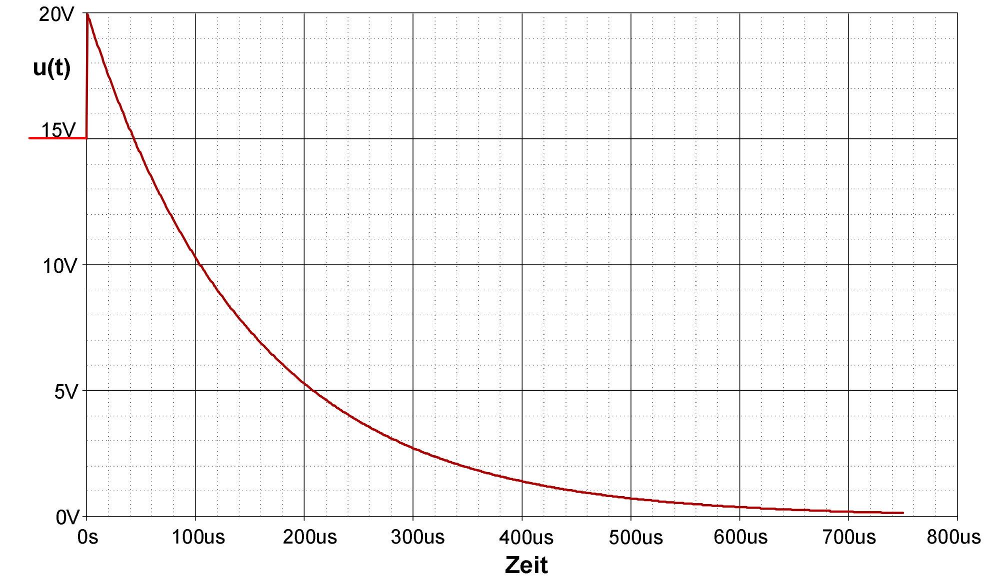
$$u(t) = 20\ \text{V} \cdot e^{\frac{-t}{150\ \mu s}}$$

$$i(t) = 22{,}5\ \text{mA} - 10\ \text{mA} \cdot e^{\frac{-t}{150\ \mu s}}$$

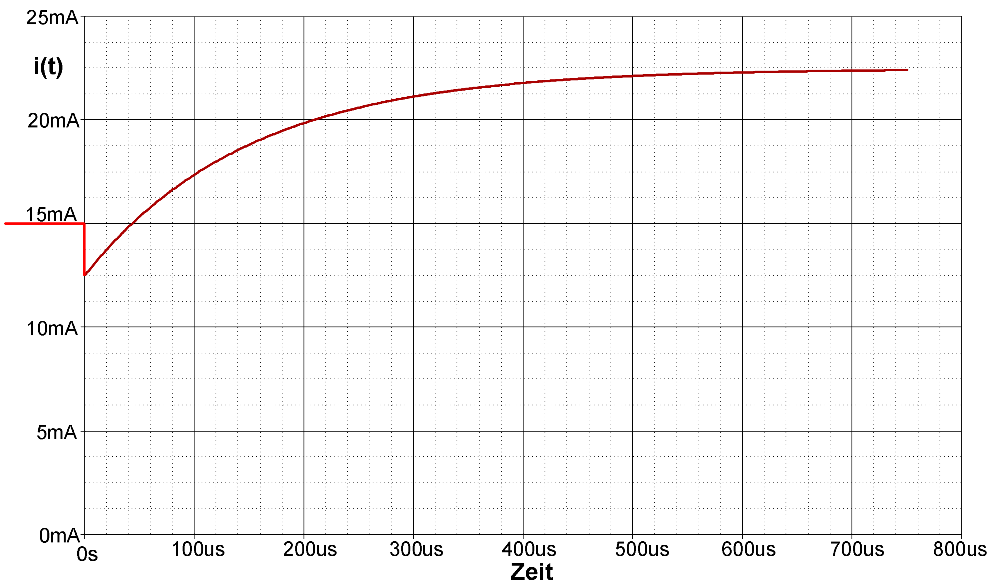
Vor dem Schließen des Schalters ergibt die Schaltungsanalyse:

$$i(0_-) = 2 \cdot i_L(0_-) = \frac{2U_q}{3R} = 15\text{mA}$$

$$u(0_-) = U_q - R \cdot i(0_-) = 45\text{V} - 2\text{k}\Omega \cdot 15\text{mA} = 15\text{V}$$



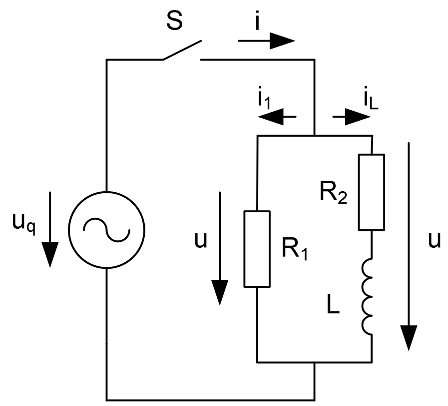
20V
u(t)
15V
10V
5V
0V
0s
100us
200us
300us
400us
500us
600us
700us
800us
Zeit

25mA
i(t)
20mA
15mA
10mA
5mA
0mA
0s
100us
200us
300us
400us
500us
600us
700us
800us
Zeit

**9.5.6**

Aus dem Schaltbild lassen sich nach Schließen des Schalters folgende Gleichung aufstellen:




$$u(t) = u_q(t) = \hat{u}_q \cdot \cos(\omega t + \psi)$$

$$u(t) = R_2 \cdot i_L(t) + L\frac{di_L(t)}{dt}$$

$$i(t) = i_L(t) + \frac{u_q(t)}{R_1}$$

Die inhomogene DGL nach $i_L(t)$

$$i_L(t) + \frac{L}{R_2}\frac{di_L(t)}{dt} = u(t) = \hat{u}_q \cdot \cos(\omega t + \psi)$$

löst man nach der bekannten Methode mit Summation aus eingeschwungenem- und flüchtigem Strom, wobei zur Berechnung des eingeschwungenen Stroms die komplexe Wechselstromrechnung angewandt wird:

$$i_L = i_{Lf} + i_{Le} \text{ mit } \underline{I}_{Le} = \frac{\frac{\hat{u}_q}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\psi}}{R_2 + j\omega L} = \frac{\frac{200\text{V}}{\sqrt{2}} e^{j30°}}{30\Omega + j2\pi \cdot 50\text{Hz} \cdot 0{,}3\text{H}} = \frac{2{,}02\text{A}}{\sqrt{2}} e^{-j42{,}3°}$$

und der homogenen DGL

$$i_{Lf}(t) + \frac{L}{R_2}\frac{di_{Lf}(t)}{dt} = 0$$

Die Lösung der homogenen DGL ergibt die bekannte e-Funktion:

$$i_{Lf}(t) = K \cdot e^{\frac{-t}{\tau}}; \text{ mit } \tau = \frac{L}{R_2} = 10\text{ms}$$

Aus der Anfangsbedingung zum Zeitpunkt t = 0 s berechnet man die Konstante K:

$$i_L(0_-) = 0\text{A} = i_L(0_+) = i_{Le}(0_+) + i_{Lf}(0_+) = 2{,}02\text{A} \cdot \cos(-42{,}3°) + K$$
$$K = -2{,}02\text{A} \cdot \cos(-42{,}3°) = -1{,}49\text{A}$$

Der Strom $i_L(t)$ lässt sich damit angeben zu:

$$i_L(t) = 2{,}02\text{A} \cdot \cos(\omega t - 42{,}3°) - 1{,}49\text{A} \cdot e^{\frac{-t}{\tau}}$$

Der Gesamtstrom i(t) berechnet sich aus der Summe von $i_L(t)$ und $i_1(t)$.

Dabei wird $i_1(t) = \frac{u_q(t)}{R_1} = 10\text{A}\cos(\omega t + 30°)$

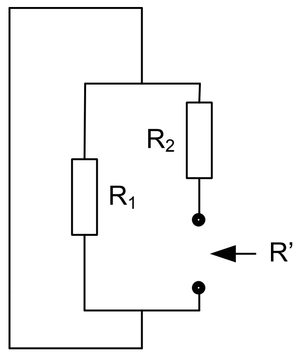
$$i(t) = i_1(t) + i_L(t) = 10\text{A}\cos(\omega t + 30°) + 2{,}02\text{A} \cdot \cos(\omega t - 42{,}3°) - 1{,}49\text{A} \cdot e^{\frac{-t}{\tau}}$$

$$i(t) = 10,8\ \text{A} \cdot \cos\left(\omega t + 19,7°\right) - 1,49\ \text{A} \cdot e^{\frac{-t}{10\ \text{ms}}}$$

Dieses Ergebnis lässt sich auch mit der vereinfachten Methode erzielen, wobei der flüchtige Anteil bei <u>einem</u> Energiespeicher immer eine e-Funktion vom Typ $K \cdot e^{\frac{-t}{\tau}}$ ist und der eingeschwungene Teil sich mit Hilfe der komplexen Wechselstromrechnung berechnen lässt.

$$i(t) = i_f(t) + i_e(t)$$

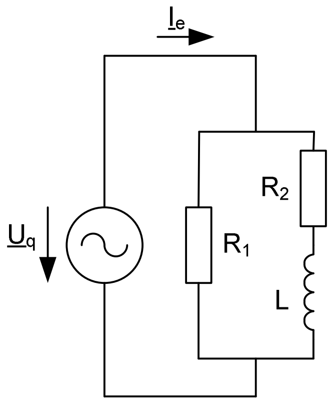
$$i(t) = K \cdot e^{\frac{-t}{\tau}} + i_e(t)$$




Die Zeitkonstante erhält man aus nebenstehendem Ersatzbild und dem Ersatzwiderstand zu:

$$\tau = \frac{L}{R'} = \frac{L}{R_2} = \frac{0,3\text{H}}{30\Omega} = 10\text{ms}$$

Berechnung des eingeschwungenen Zustands:



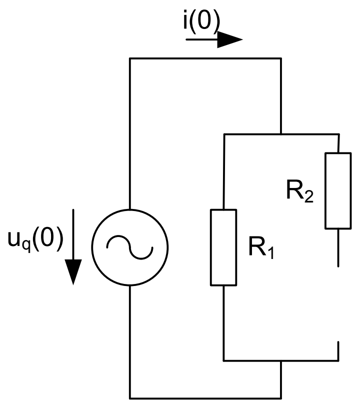

$$\underline{Y} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + j\omega L} = \frac{1}{20\Omega} + \frac{1}{30\Omega + j2\pi \cdot 50\text{Hz} \cdot 0,3\text{H}}$$

$$\underline{Y} = 53,9\text{mS} \cdot e^{-j10,3°}$$

$$\underline{I}_e = \underline{U}_q \cdot \underline{Y} = \frac{200\text{V}e^{j30°}}{\sqrt{2}} \cdot 53,9\text{mS} \cdot e^{-j10,3°} = \frac{10,8\text{A}}{\sqrt{2}} e^{j19,7°}$$

$$i_e(t) = 10,8\text{A} \cdot \cos(\omega t + 19,7°)$$

Zum Schluss ist noch die Konstante K zu berechnen.
Da zum Einschaltzeitpunkt die Spule energielos ist, bestimmt sich der Gesamtstrom zum Zeitpunkt t = 0 s:



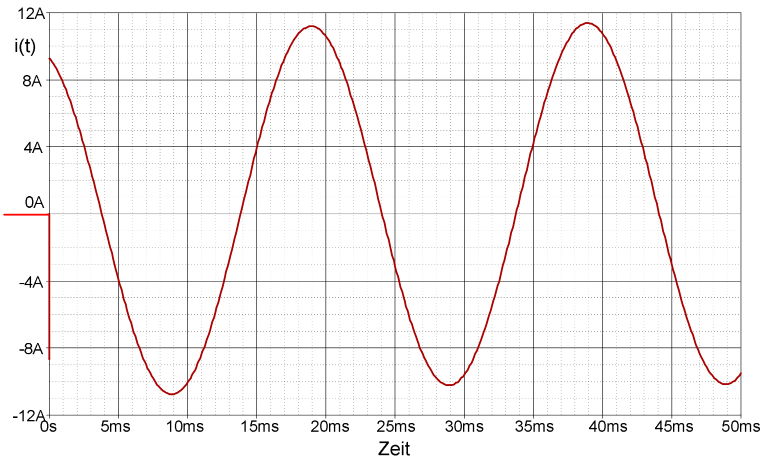

$$i(0_-) = \frac{u_q(0)}{R_1} = \frac{200\text{V} \cdot \cos 30°}{20\Omega} = 8,66\text{A} = i(0_+)$$

$$i(0_+) = K + 10,8\text{A} \cdot \cos 19,7° = 8,66\text{A}$$

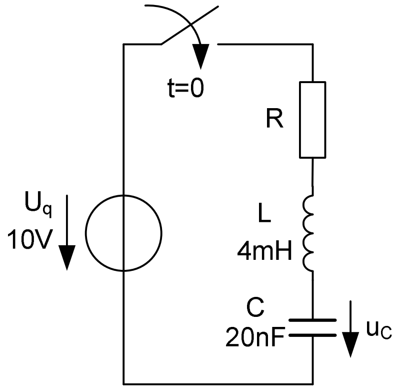
$$K = -1,51\text{A}$$

Damit lässt sich der zeitliche Verlauf des Stromes angeben:

$$i(t) = -1,51\text{A} \cdot e^{\frac{-t}{\tau}} + 10,8\text{A} \cdot \cos(\omega t + 19,7°)$$



### 9.5.7 Ausgleichsvorgang in einem Schwingkreis




Berechnung für R = 100 Ω

1. Differentialgleichung

$$\frac{d^2u_C}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{du_C}{dt}+\frac{1}{LC}u_C=\frac{U_q}{LC};\ \text{(inhomogene DGL 2. Ordnung)}$$
$$u_C=u_{Cf}+u_{Ce};\ \text{mit } u_{Ce}=U_q$$
$$\frac{d^2u_{Cf}}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{du_{Cf}}{dt}+\frac{1}{LC}u_{Cf}=0;\ \text{(homogene DGL 2. Ordnung)}$$

Allgemeine Lösung:

$$u_{Cf}=K_1e^{p_1t}+K_2e^{p_2t}$$

2. Charakteristische Gleichung:

$$p_{1,2}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}}=-\delta\pm\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}$$
$$\delta=\frac{R}{2L}=\frac{100\Omega}{2\cdot 4mH}=12,5\cdot 10^3s^{-1};\ \tau=\frac{1}{\delta}=80\mu s$$
$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}=\frac{1}{\sqrt{4mH\cdot 20nF}}=111,8\cdot 10^3s^{-1}$$
$$\delta<\omega_0\Rightarrow \text{periodischer Fall}$$
$$\omega=\left|\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}\right|=111,1\cdot 10^3s^{-1};\ f=\frac{\omega}{2\pi}=17,68kHz;\ T=\frac{1}{f}=56,55\mu s$$
$$p_{1,2}=\delta\pm j\omega=12,5\cdot 10^3s^{-1}\pm j111,1\cdot 10^3s^{-1}$$

3. Lösung (siehe auch Kapitel 6.5.2)

$$K_1=\frac{p_2}{p_1-p_2}U_q=\frac{\delta-j\omega}{j2\omega}U_q;\ K_2=-\frac{p_1}{p_1-p_2}U_q=-\frac{\delta+j\omega}{j2\omega}$$
$$u_{Cf}=-U_q\cdot e^{-\delta t}\left[\frac{\delta}{\omega}\frac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2j}+\frac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2}\right]=-U_q\cdot e^{-\delta t}\left(\frac{\delta}{\omega}\sin\omega t+\cos\omega t\right)$$

Eingeschwungener Zustand: $u_{Ce}=U_q$

$$u_C=u_{Ce}+u_{Cf}=U_q-U_q\cdot e^{-\delta t}\left(\frac{\delta}{\omega}\sin\omega t+\cos\omega t\right)$$
$$u_C=10V\left[1-e^{\frac{-t}{80\mu s}}\left(0,1125\sin\omega t+\cos\omega t\right)\right];\ \text{mit } \omega=2\pi\cdot 17,68kHz$$

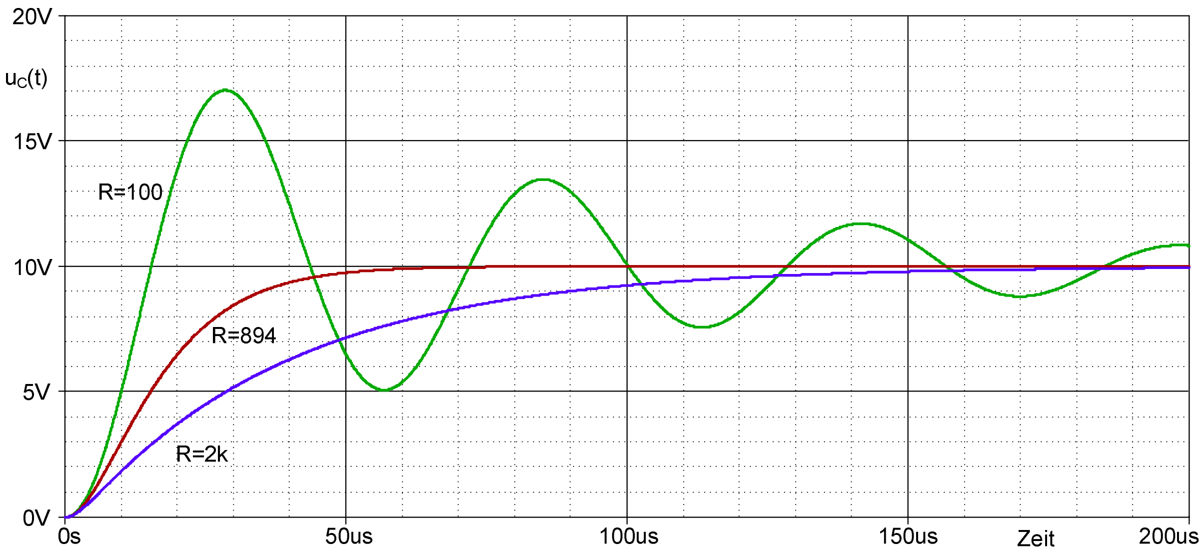
oder

$$u_C = U_q\left[1 - A\cdot e^{-\delta t}\cdot\sin\left(\omega t+\psi\right)\right]$$

$$A = \sqrt{\frac{\delta^2}{\omega^2}-1} = 8{,}83;\ \psi = \arctan\frac{\omega}{\delta} = 83{,}58°$$

$$u_C = 10V\left[1 - 8{,}83\cdot e^{\frac{-t}{80\mu s}}\cdot\sin\left(\frac{360°}{56{,}55\mu s}t + 83{,}58°\right)\right]$$

Die Grafik zeigt den zeitlichen Verlauf der Kondensatorspannung für unterschiedliche Widerstandwerte R. Der gesuchte Verlauf ist die grüne Kurve (R = 100 Ω), zusätzlich sind der aperiodische Grenzfall bei R = 894 Ω (rot) und der aperoidische Verlauf für R = 2 kΩ (blau) gegeben.



**9.5.8** Berechnung des Ausgleichsvorgangs nach der vereinfachten Methode:

$$\tau = \frac{L}{R'};\ \text{mit } R' = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = 937{,}5\Omega \ \rightarrow\ \tau = 0{,}8\text{ms}$$

Anfangszustand: L ist stromlos

$$i_{1A} = \frac{U_1 - U_2}{R_1 + R_2} = \frac{18\text{V}}{4\text{k}\Omega} = 4{,}5\text{mA}$$

$$i_{2A} = -i_{1A} = -4{,}5\text{mA}$$

$$i_{3A} = 0\text{mA}$$

Endzustand: L wird ersetzt durch Kurzschluss

$$i_{1E} = \frac{U_1}{R_1} = 24\text{mA}$$

$$i_{2E} = \frac{U_2}{R_2} = 7{,}2\text{mA}$$

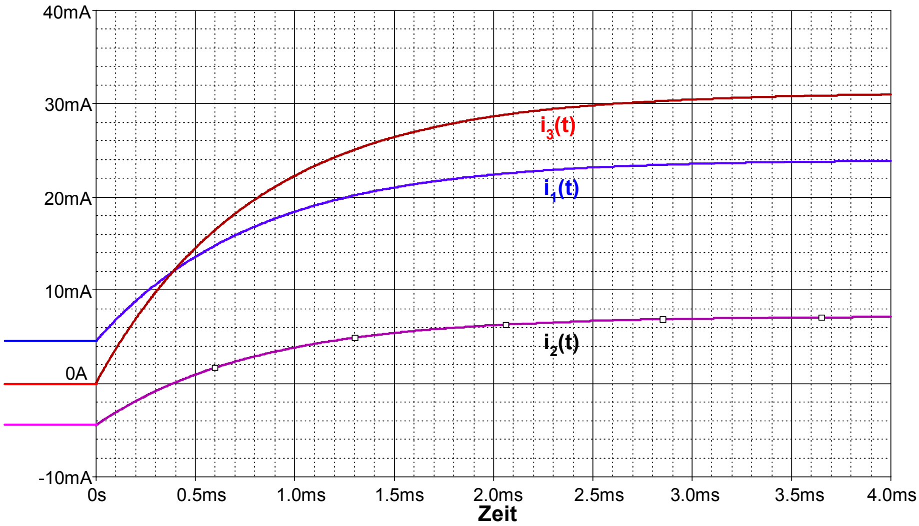
$$i_{3E} = i_{1E} + i_{2E} = 31{,}2\text{mA}$$

Bestimmung der e-Funktionen: $y = y_E - (y_E - y_A)e^{-t/\tau}$

$$i_1(t) = 24\text{ mA} - 19{,}5\text{ mA} \cdot e^{\frac{-t}{0{,}8\text{ ms}}}$$

$$i_2(t) = 7{,}2\text{ mA} - 11{,}5\text{ mA} \cdot e^{\frac{-t}{0{,}8\text{ ms}}}$$

$$i_3(t) = 31{,}2\text{ mA} \cdot \left(1 - e^{\frac{-t}{0{,}8\text{ ms}}}\right)$$



**9.5.9** Berechnung des Ausgleichsvorgangs nach der vereinfachten Methode:

$$\tau = \frac{L}{R'};\ \text{mit } R' = R + \frac{R \cdot R}{R + R} = 1{,}5R = 225\Omega \ \rightarrow\ \tau = 2{,}2\overline{2}\ \mu s$$

Zustand vor dem Schalten:

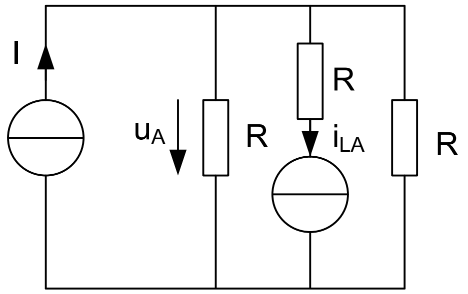
$i_{L0-} = I/2 = 50\ mA$

$u_{0-} = I \cdot R/2 = 7{,}5\ V$

Anfangszustand (unmittelbar nach Schließen des Schalters, L wird ersetzt durch Stromquelle):

$i_{LA} = i_{L0-} = I/2 = 50\ mA$

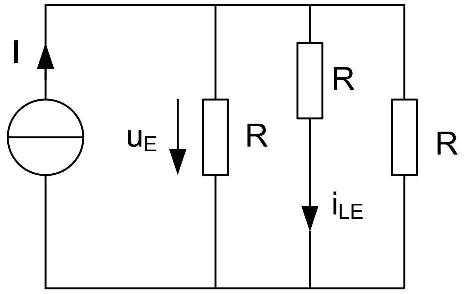
$$u_A = \frac{I - i_{LA}}{2} R = 3{,}75\ V$$




Endzustand: L wird ersetzt durch Kurzschluss

$i_{LE} = I/3 = 33{,}3\ mA$

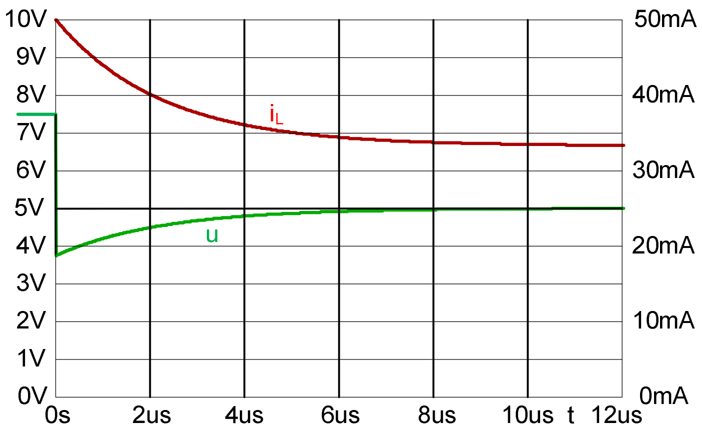
$$u_E = \frac{I}{3} R = 5\ V$$




Bestimmung der e-Funktionen: $y = y_E - (y_E - y_A) e^{-t/\tau}$

$i_L = 33{,}3mA + 16{,}7mA \cdot e^{-t/\tau}$

$u = 5V - 1{,}25V \cdot e^{-t/\tau}$



**9.5.10** Berechnung des Ausgleichsvorgangs nach der vereinfachten Methode:

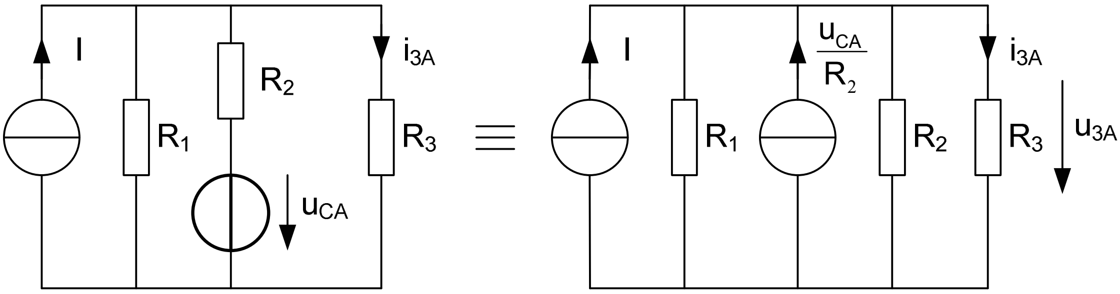
$$\tau = C \cdot R'; \text{ mit } R' = R_2 + \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_3} = 80\Omega \;\rightarrow\; \tau = 10\text{ ms}$$

Zustand vor dem Schalten:

$$i_{30-} = I = 250\text{ mA}$$

$$u_{C0-} = I \cdot R_3 = 25\text{ V}$$

Anfangszustand unmittelbar nach dem Schalten:




$$u_{CA} = u_{C0-} = I \cdot R_3 = 25\text{ V}$$

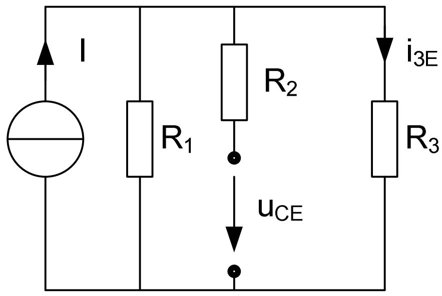
$$u_{3A} = \left( I + \frac{u_{CA}}{R_2} \right) \cdot R_1 \,\|\, R_2 \,\|\, R_3 = (250\text{mA} + 625\text{mA}) \cdot 20\Omega = 17{,}5\text{V}$$

$$i_{3A} = \frac{u_{3A}}{R_3} = 175\text{mA}$$

Endzustand:

$$u_{CE} = I \cdot \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} = 250\text{mA} \cdot 40\Omega = 10\text{V}$$

$$i_{3E} = \frac{u_{CE}}{R_3} = \frac{10\text{V}}{100\Omega} = 100\text{mA}$$

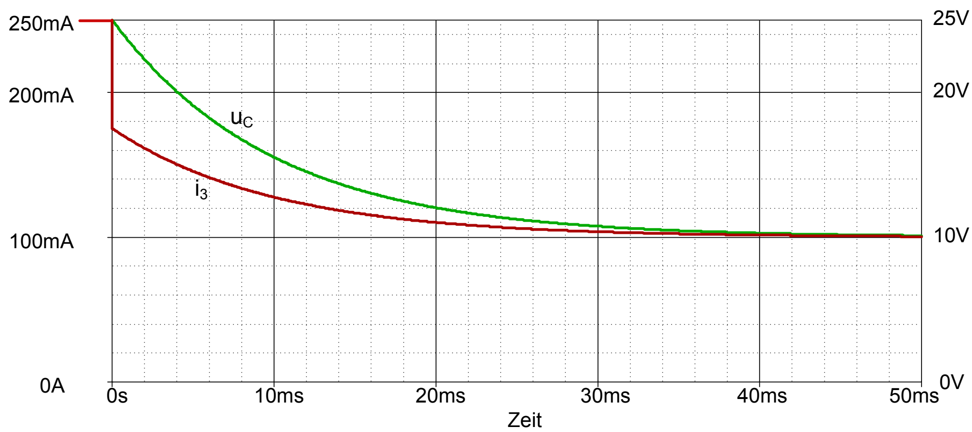



Bestimmung der e-Funktionen:

$$y = y_E - (y_E - y_A)e^{-t/\tau}$$

$$u_C = 10\text{V} - (10\text{V} - 25\text{V}) \cdot e^{-t/\tau} = 10\text{V} + 15\text{V} \cdot e^{-t/\tau};\ \tau = 10\text{ms}$$

$$i_3 = 100\text{mA} - (100\text{mA} - 175\text{mA}) \cdot e^{-t/\tau} = 100\text{mA} + 75\text{mA} \cdot e^{-t/\tau}$$



**9.5.11** Berechnung des Ausgleichsvorgangs nach der vereinfachten Methode:

$\tau = C \cdot R'$; mit $R' = R_1 = 1{,}5\,\mathrm{k\Omega} \;\rightarrow\; \tau = 1{,}5$ ms (Stromquelle stellt Leerlauf dar!)

Zustand vor dem Schalten: Kondensator besitzt keine Ladung

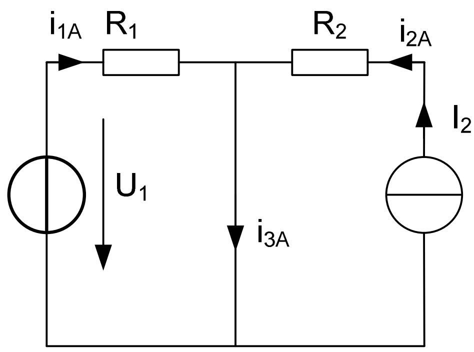
$u_{C0-} = 0$

$i_{20-} = I_2 = 2\mathrm{mA}$

$i_{10-} = -i_2 = -2\mathrm{mA}$

$i_{30-} = 0$

Anfangszustand unmittelbar nach dem Schalten:
Kondensator wird durch Kurzschluss ersetzt.

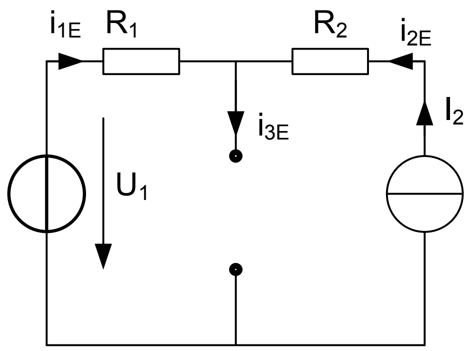



$$i_{1A} = \frac{U_1}{R_1} = \frac{15\mathrm{V}}{1{,}5\mathrm{k\Omega}} = 10\mathrm{mA}$$

$i_{2A} = I_2 = 2\mathrm{mA}$

$i_{3A} = i_{1A} + i_{2A} = 12\mathrm{mA}$

Endzustand: Kondensator wird durch Leerlauf ersetzt.




$i_{2E} = I_2 = 2\mathrm{mA}$

$i_{1E} = -I_2 = -2\mathrm{mA}$

$i_{3E} = 0$

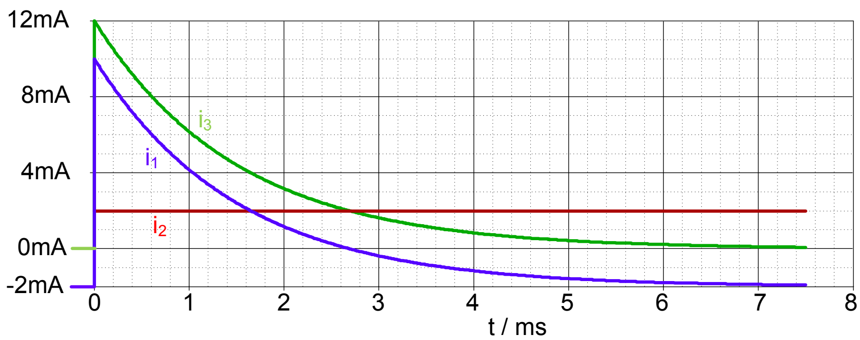
Bestimmung der e-Funktionen:

$$y = y_E - (y_E - y_A)e^{-t/\tau}$$

$i_1 = -2\mathrm{mA} - (-2\mathrm{mA} - 10\mathrm{mA}) \cdot e^{-t/\tau} = -2\mathrm{mA} + 12\mathrm{mA} \cdot e^{-t/\tau}$; mit $\tau = 1{,}5\mathrm{ms}$

$i_2 = I_2 = 2\mathrm{mA}$

$i_3 = 12\mathrm{mA} \cdot e^{-t/\tau}$



**9.5.12** Berechnung des Ausgleichsvorgangs nach der vereinfachten Methode:

$\tau = C \cdot R'$; mit $R' = R_2 \parallel (R_1 + R_3) = 68{,}6\Omega \;\rightarrow\; \tau = 68{,}6\ \mu s$ (Stromquelle stellt Leerlauf dar!)

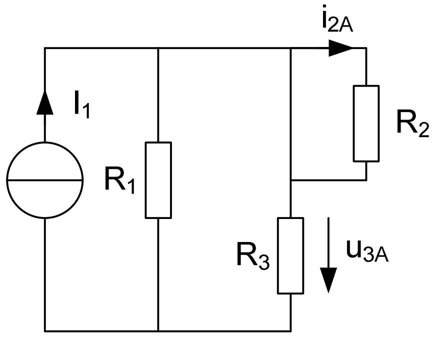
Zustand <u>vor</u> dem Schalten: Kondensator besitzt keine Ladung

$u_{C0-} = 0$

$i_{20-} = 0$

$u_{30-} = 0$

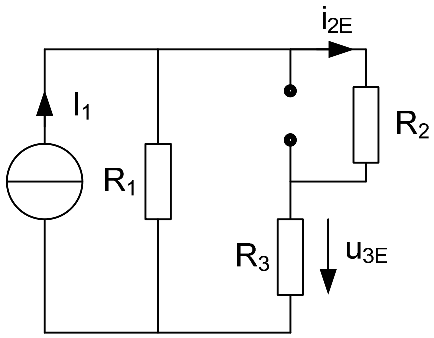
Anfangszustand unmittelbar <u>nach</u> dem Schalten:
Kondensator wird durch Kurzschluss ersetzt.




$i_{2A} = 0$

$$u_{3A} = I_1 \cdot (R_1 \parallel R_3) = I_1 \cdot \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_3} = 11{,}25V$$

Endzustand: Kondensator wird durch Leerlauf ersetzt.




$R_{23} = R_2 + R_3$

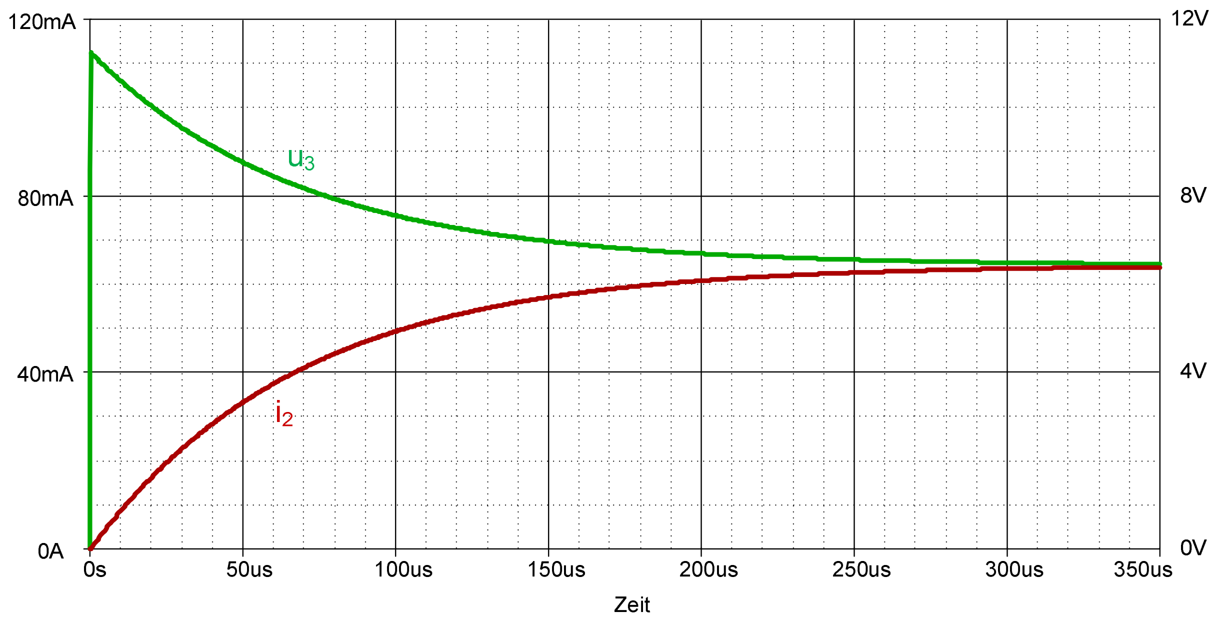
$$i_{2E} = I_1 \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_{23}} = I_1 \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3} = 64{,}3mA$$

$u_{3E} = i_{2E} \cdot R_3 = 6{,}43V$

Bestimmung der e-Funktionen: $y = y_E - (y_E - y_A)e^{-t/\tau}$

$i_2 = 64{,}3mA\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$; mit $\tau = 68{,}6\ \mu s$

$u_3 = 6{,}43V - (6{,}43V - 11{,}25V) \cdot e^{-t/\tau} = 6{,}43V + 6{,}42V \cdot e^{-t/\tau}$



**9.6.1**

a) In einem stationären elektrischen Strömungsfeld, gegeben durch den konstanten Strom I = 1A berechnet sich die transportierte Ladung zu:

$$Q = I \cdot t = 1A \cdot 1s = 1C$$

b) $v = \frac{S}{\rho} = \frac{I/A}{\frac{N}{mm^3} \cdot e} = \frac{1A/1mm^2}{\frac{85 \cdot 10^{18}}{mm^3} \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19} As} = 0{,}073 mm/s$

c) $v \sim \frac{1}{A}$ $\rightarrow$ Bei Halbierung der Querschnittsfläche verdoppelt sich die Geschwindigkeit der Elektronen.

$$v = 0{,}147 mm/s$$

Damit ergib sich eine höhere Verlustleistung im Leiter.

**9.6.2**

a) Kupferleiter: $S_{Cu} = \frac{I}{A_{Cu}} = \frac{1A}{1{,}5mm^2} = 0{,}667 \frac{A}{mm^2}$

Wolframdraht: $S_W = \frac{I}{A_W} = \frac{1A}{0{,}0004mm^2} = 2500 \frac{A}{mm^2}$

b) Kupferleiter: $v_{Cu} = \frac{S_{Cu}}{\rho} = \frac{S_{Cu}}{\frac{N}{mm^3} \cdot e} = \frac{0{,}667 A/mm^2}{\frac{1 \cdot 10^{20}}{mm^3} \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19} As} = 0{,}0416 mm/s$

Wolframdraht: $v_W = \frac{S_W}{\rho} = \frac{S_W}{\frac{N}{mm^3} \cdot e} = \frac{2500 A/mm^2}{\frac{1 \cdot 10^{20}}{mm^3} \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19} As} = 156 mm/s$

**9.6.3** $v = \frac{S}{\rho} = \frac{I/A}{\frac{N}{mm^3} \cdot e} = \frac{10A/1mm^2}{\frac{1 \cdot 10^{20}}{mm^3} \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19} As} = 0{,}624 mm/s \approx 1 mm/s$

**9.6.4** Durch die geneigte Fläche A tritt der gleiche Strom wie durch die Querschnittsfläche des Leiters $A_q$.

$I = S \cdot A_q = 5A/mm^2 \cdot 20mm \cdot 15mm = 1500A$

**9.7.1**

a) Berechnung der Leitungskonstanten $\underline{Z}_L$ und $\underline{\gamma}$

$$\underline{Z}_L = \sqrt{\frac{L'}{C'}}\cdot\sqrt{\frac{1+R'/j\omega L'}{1+G'/j\omega C'}} = \sqrt{\frac{30nH/m}{4pF/m}}\sqrt{\frac{1+150m\Omega/j2\pi\cdot 2MHz\cdot 30nH}{1+1pS/j2\pi\cdot 2MHz\cdot 4pF}}$$

$$= 86,6\Omega\cdot\sqrt{\frac{1-j0,4}{1-j20\cdot 10^{-9}}} \approx 86,6\Omega\cdot\sqrt{1-j0,4} \approx 86,6\Omega\cdot\sqrt{1,077\cdot e^{-j21,8°}}$$

$$\approx 86,6\Omega\cdot 1,038\cdot e^{-j10,9°} \approx 90\Omega\cdot e^{-j10,9°}$$

$$\approx 87,6\Omega - j16,9\Omega$$

$$\underline{\gamma} = \sqrt{(R'+j\omega L')(G'+j\omega C')} = \sqrt{-\omega^2 L'C'}\cdot\sqrt{\left(1+\frac{R'}{j\omega L'}\right)\left(1+\frac{G'}{j\omega C'}\right)}$$

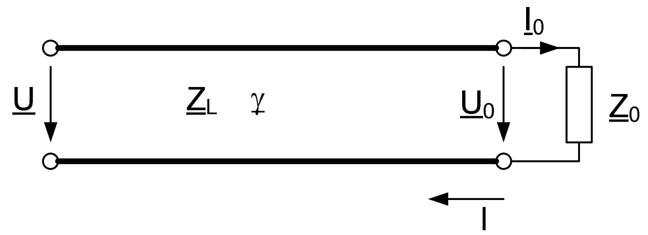
$$= j\omega\sqrt{L'C'}\cdot\sqrt{\left(1+\frac{R'}{j\omega L'}\right)\left(1+\frac{G'}{j\omega C'}\right)} = j4,35\cdot 10^{-3}\frac{1}{m}\cdot\sqrt{(1-j0,4)(1-j20\cdot 10^{-9})}$$

$$\approx j4,35\cdot 10^{-3}\frac{1}{m}\cdot\sqrt{(1-j0,4)} \approx j4,35\cdot 10^{-3}\frac{1}{m}\cdot 1,038\cdot e^{-j10,9°}$$

$$\approx j4{,}44\cdot 10^{-3}\frac{1}{m} + 0,854\cdot 10^{-3}\frac{1}{m}$$

$$\alpha = 0,854\cdot 10^{-3}\frac{1}{m};\quad \beta = 4,44\cdot 10^{-3}\frac{1}{m} = 0,254°/m$$

b) Berechnung von Strom, Spannung und komplexer Leistung am Ende der Leitung.




Angepasste Leitung am Ende $\underline{Z}_0 = \underline{Z}_L \rightarrow U_r = 0$

$$\underline{U}(l) = \underline{U}_0\cdot e^{\underline{\gamma}\cdot l} = \underline{U}_0\cdot e^{\alpha l}\cdot e^{j\beta l}$$

$$\underline{U}(200m) = \underline{U}$$

$$\underline{U}_0 = \frac{U}{e^{\alpha l}\cdot e^{j\beta l}} = \frac{10V}{e^{0,854\cdot 10^{-3}\cdot 200}\cdot e^{j0,254°\cdot 200}} = \frac{10V}{1{,}19}e^{-j50,9°} = 8,4Ve^{-j50,9°}$$

$$\underline{I}_0 = \frac{\underline{U}_0}{\underline{Z}_0} = \frac{8,4Ve^{-j50,9°}}{90\Omega e^{-j10,9°}} = 0,0937Ae^{-j40°}$$

$$\underline{S}_0 = \underline{U}_0\cdot\underline{I}_0^* = 8,4Ve^{-j50,9°}\cdot 0,0937Ae^{j40°} = 0,787VAe^{-j10,9°} = 0,773W - j0{,}147VAr$$

c) Berechnung von Strom und komplexer Leistung am Anfang der Leitung.

Angepasste Leitung $\rightarrow \underline{Z}_E = \underline{Z}_L$

$$\underline{I}_E = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_A} = \frac{10\text{V}}{90\Omega e^{-j10,9°}} = 0{,}111\text{A}e^{j10,9°};$$

$$\underline{S}_E = \underline{U}\cdot\underline{I}^* = 10\text{V}\cdot 0{,}111\text{A}e^{-j10,9°} = 1{,}11\text{VA}e^{-j10,9°} = 1{,}09\text{W} - j0{,}21\text{VAr}$$

**9.7.2** Angepasste Leitung → $U_r = 0$; $|U_0| = |U|e^{-\alpha l}; P_0 \sim |U_0|^2 = |U|^2 e^{-2\alpha l}$

Hälfte der Leistung: $e^{-2\alpha l} = 0{,}5 \rightarrow l = \frac{\ln 0{,}5}{-2\alpha}$

$$\underline{\gamma} = \sqrt{(R'+j\omega L')(G'+j\omega C')} = \sqrt{-\omega^2 L'C'}\cdot\sqrt{\left(1+\frac{R'}{j\omega L'}\right)\left(1+\frac{G'}{j\omega C'}\right)}$$

$$= j\omega\sqrt{L'C'}\cdot\sqrt{\left(1+\frac{R'}{j\omega L'}\right)\left(1+\frac{G'}{j\omega C'}\right)} = j0{,}1154\frac{1}{\text{km}}\cdot\sqrt{(1-j0{,}255)(1-j0{,}00353)}$$

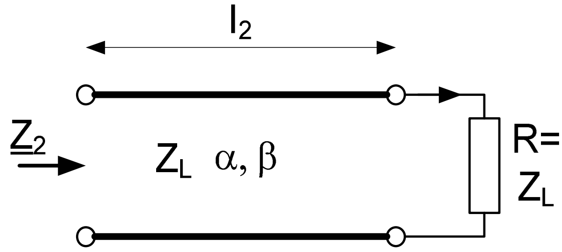
$$\approx j0{,}1154\frac{1}{\text{km}}\cdot\sqrt{(1-j0{,}258)} \approx j0{,}1154\frac{1}{\text{km}}\cdot 1{,}016\cdot e^{-j7,25°}$$

$$\approx j0{,}1163\frac{1}{\text{km}} + 0{,}0148\frac{1}{\text{km}}; \quad \alpha = 0{,}0148\frac{1}{\text{km}}$$

$$l = \frac{\ln 0{,}5}{-2\alpha} = \frac{\ln 0{,}5}{-2\cdot 0{,}0148}\text{km} = 23{,}4\text{km}$$

**9.7.3**

a) Der Eingangswiderstand der mit $R = Z_L$ abgeschlossenen Leitung im Abschnitt 2 beträgt unabhängig von ihrer Länge:




$\underline{Z}_2 = Z_L = 75\Omega$

Damit bestimmt sich die Impedanz $\underline{Z}$ an der Stelle x = L aus der Parallelschaltung von $\underline{Z}_2$ und R zu

$$\underline{Z} = \frac{\underline{Z}_2\cdot R}{\underline{Z}_2 + R} = 37{,}5\Omega$$

und der Reflexionsfaktor $\underline{r}$ an der Stelle x = L zu

$$\underline{r} = \frac{\underline{Z}-Z_L}{\underline{Z}+Z_L} = \frac{37{,}5\Omega - 75\Omega}{37{,}5\Omega + 75\Omega} = -0{,}333\,.$$

b) Im Abschnitt 1 ist die Leitung nun mit $\underline{Z} = 37{,}5\Omega$ abgeschlossen. Ihr Eingangsreflexionsfaktor lässt sich bestimmen durch

$$\underline{r}_E = \underline{r}\cdot e^{-2\alpha L}e^{-2j\beta L} = \underline{r}\cdot 10^{-2\alpha L/20\text{dB}}e^{-2j\beta L}; \text{ mit } \beta = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ und } \lambda = \frac{c_0}{f\cdot\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}}$$

$$\lambda = \frac{3 \cdot 10^8 \, m/s}{98{,}91 \cdot 10^6 /s \cdot \sqrt{2{,}3}} = 2m$$

$$\beta = \frac{2\pi}{2m} = 3{,}14/m = 180°/m$$

$$-2\beta L = -2 \cdot 180° \cdot 26{,}5 = -53 \cdot 180° \mathrel{\hat{=}} -180°$$

$$\underline{r}_E = \underline{r} \cdot 10^{-2 \cdot 0{,}0173 dB/m \cdot 26{,}5m/20dB} e^{-j180°} = -0{,}333 \cdot 10^{-0{,}0458} \cdot e^{-j180°} = 0{,}3$$

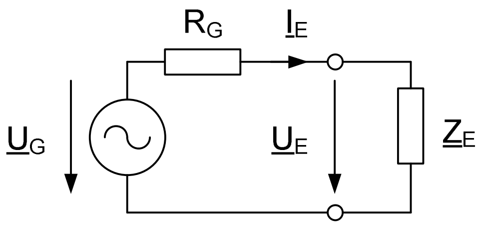
$$\underline{Z}_E = Z_L \frac{1+\underline{r}_E}{1-\underline{r}_E} = 75\Omega \frac{1+0{,}3}{1-0{,}3} = 139\Omega$$

Zur Bestimmung von Spannung und Strom am Eingang der Leitung wird die nachstehende Schaltung betrachtet:

$$\underline{U}_E = \underline{U}_G \frac{\underline{Z}_E}{\underline{Z}_E + R_G} = 100V \frac{139\Omega}{139\Omega + 75\Omega}$$

$$\underline{U}_E = 65V$$

$$\underline{I}_E = \frac{\underline{U}_E}{\underline{Z}_E} = \frac{65V}{139\Omega} = 0{,}468A$$




c) Die Leitungsgleichungen für eine schwach verlustbehaftete Leitung lauten:

$$\underline{U}(x) = \underline{U}_h \cdot e^{-\alpha x} \cdot e^{-j\beta x} + \underline{U}_r \cdot e^{\alpha x} \cdot e^{j\beta x}$$

$$\underline{I}(x) \cdot Z_L = \underline{U}_h \cdot e^{-\alpha x} \cdot e^{-j\beta x} - \underline{U}_r \cdot e^{\alpha x} \cdot e^{j\beta x}$$

Am Anfang der Leitung ist x = 0 →

$$\underline{U}_E = \underline{U}_{h1} + \underline{U}_{r1}$$

$$\underline{I}_E \cdot Z_L = \underline{U}_{h1} - \underline{U}_{r1}$$

Die Lösung dieser zwei Gleichungen ergibt

$$\underline{U}_E + \underline{I}_E \cdot Z_L = 2\underline{U}_h$$

$$\underline{U}_{h1} = \frac{\underline{U}_E + \underline{I}_E \cdot Z_L}{2} = \frac{65V + 0{,}468A \cdot 75\Omega}{2} = 50V$$

$$\underline{U}_{r1} = \frac{\underline{U}_E - \underline{I}_E \cdot Z_L}{2} = \frac{65V - 0{,}468A \cdot 75\Omega}{2} = 15V$$

d) Berechnung von Strom und Spannung an der Stelle x = L

$$\underline{U}(L) = \underline{U}_{h1} \cdot 10^{-\frac{\alpha L}{20dB}} \cdot e^{-j\beta L} + \underline{U}_{r1} \cdot 10^{\frac{\alpha L}{20dB}} \cdot e^{j\beta L}$$

$$\underline{U}(L) = 50V \cdot 10^{-0{,}0229} \cdot e^{-j90°} + 15V \cdot 10^{0{,}0229} \cdot e^{j90°}$$

$$\underline{U}(L) = 39{,}4V \cdot e^{-j90°} + 31{,}9V \cdot e^{j90°}$$

$$\underline{U}(L) = -j31{,}8V$$

$$\underline{I}(L) = \frac{\underline{U}(L)}{\underline{Z}} = \frac{-j31{,}8V}{37{,}5\Omega} = -j0{,}848A$$

e) Da der zweite Leitungsabschnitt mit seinem Wellenwiderstand abgeschlossen ist, ist hier die Integrationskonstante $\underline{U}_{r2} = 0$.

Damit wird $\underline{U}_{h2} = \underline{U}(L) = -j31{,}5V$.

**9.7.4**

a) Da R' = 0 und G' = 0 ist die Leitung verlustlos. Der Wellenwiderstand wird reell und berechnet sich zu:

$$Z_L = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = \sqrt{\frac{500nH}{50pF}} = 100\Omega$$

Die Dämpfungskonstante wird $\alpha = 0$, die Phasenkonstante berechnet sich zu:

$$\beta = \omega\sqrt{L'C'} = 2\pi \cdot 1MHz\sqrt{500nH \cdot 50pF} = \pi \cdot 10^{-2} / m = 1{,}8° / m$$

Der Eingangswiderstand einer verlustlosen, am Ende kurzgeschlossenen Leitung berechnet sich zu

$$\underline{Z}_E = jZ_L \tan\beta L = j100\Omega \cdot \tan(\frac{1{,}8°}{m} \cdot 25m) = j100\Omega \cdot \tan 45° = j100\Omega .$$

Die Eingangsspannung ergibt sich daraus mit dem Eingangsstrom zu

$$\underline{U}_E = \underline{I}_E \underline{Z}_E = 100mA \cdot j100\Omega = j10V .$$

Der Strom am Ausgangskurzschluss lässt sich allgemein mit den Leitungsgleichungen für den verlustlosen Fall angeben zu

$$\frac{\underline{I}(L)}{\underline{I}_0} = \cos\beta L + j\frac{\underline{Z}_A}{Z_L}\sin\beta L .$$

Im Kurzschlussfall ist $\underline{Z}_A = 0$, so dass sich Kurzschlussstrom am Ende der Leitung berechnet zu

$$\underline{I}_0 = \frac{\underline{I}(L)}{\cos\beta L} = \frac{100mA}{\cos 45°} = 141mA .$$